

الطما فلام الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

علوم تجريبية. رياضيات. تقني رياضي

الجزء 1

دروس وتطبيقات

دار الشريعة



تأليف: أ. حمزة

مثال -

ثلاث متتاليات معرفة بـ :
 (U_n) ، (V_n) ، (W_n)
 $W_0 = 2$ مع $W_{n+1} = 3W_n - 1$ و $g: x \mapsto x^2 + 1$ حيث $V_n = g(n)$ ، $U_n = (-\frac{1}{2})^n$
 - المتتاليتان (V_n) و (U_n) معرفتان بحديهما العام وأما المتتالية (W_n) فهي تراجعية.

1 - 2 اتجاه تغير متتالية

القول ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > U_n$
 - القول ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} < U_n$
 - القول ان المتتالية (U_n) ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظة

بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة او المتناقصة وذلك بتبديل المتباينة
 $U_{n+1} > U_n$ بـ $U_{n+1} \geq U_n$ (المتباينة $U_{n+1} < U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$)

مثال -

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة $U_n = 3n + 5$
 ومنه الحد U_{n+1} معرف بـ $U_{n+1} = 3(n+1) + 5 = 3n + 8 = U_n + 3$
 بما ان $3 > 0$ فإن (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N}

1 - 3 المتتالية الحسابية

القول ان المتتالية (U_n) حسابية يعني أنه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = U_n + r$ ، يدعى r أساس المتتالية (U_n)
 • من أجل كل عددين طبيعيين m و p يكون $U_m = U_p + (m - p)r$
 • مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية
 إذا كان $S = p + \dots + d$ هو مجموع m حد لتتابع من متتالية حسابية فإن :

$$S = \frac{m}{2}(p + d)$$

مثال -

ليكن S مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية 1 ، 2 ، ، n
 لاحظ ان S هو مجموع n حد أول لتعاقبة من متتالية حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير n وأساسها $r = 1$ ومنه فإن $S = \frac{n}{2}(1 + n)$

1 - 4 المتتالية الهندسية

القول ان (U_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} = q \times U_n$ ، ويدعى q أساس المتتالية (U_n)
 • من أجل كل عددين طبيعيين m و p يكون $U_m = U_p \times q^{m-p}$
 • مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية
 إذا كان $S = p + \dots + d$ هو مجموع m حد لتتابع لمتتالية هندسية حدها الأول p و أساسها q فإن $S = p \times \frac{1 - q^m}{1 - q}$ حيث $(q \neq 1)$

مثال -

S مجموع الأعداد الحقيقية العرف بـ $S = 1 + q + \dots + q^{n-1}$
 S عبارة عن مجموع n حد أول من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q إذن $S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
 (1) عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج عبارة الحد العام U_n
 (2) نفرض ان $U_n \neq 0$ ونضع $V_n = \frac{1}{U_n}$
 - بين ان المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها
 ب- استنتج عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

✓ الحل :

$$(1) \quad U_1 = \frac{U_0}{1 + U_0} = \frac{1}{2} , U_2 = \frac{U_1}{1 + U_1} = \frac{1}{3} , U_3 = \frac{U_2}{1 + U_2} = \frac{1}{4} , U_4 = \frac{U_3}{1 + U_3} = \frac{1}{5} , U_5 = \frac{U_4}{1 + U_4} = \frac{1}{6}$$

نلاحظ ان الحدود الأولى لهذه المتتالية تكتب على الشكل $U_n = \frac{1}{n+1}$
 (2) حتى تكون (V_n) حسابية يجب ان يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} - V_n = r$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1 + U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = 1$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ و حدها الأول $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

(ب) عبارة الحد العام V_n هي $V_n = V_0 + n \times r$ بالتعويض نجد :

$$V_n = 1 + n \text{ و } U_n = \frac{1}{1+n}$$

تمرين تدريبي 2

- عين خمسة حدود موجبة من متتالية هندسية U_5, U_4, U_3, U_2, U_1 مع العلم

$$U_1 \times U_5 = 25 \text{ و } U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}$$

✓ الحل :

$$U_1 \times U_5 = U_1 \times U_1 \times r^4 = (U_1 \times r^2)^2 = (U_3)^2$$

$$\text{و بما أن } U_1 \times U_5 = 25 \text{ فإن } U_3 = 5$$

$$\text{المساواة } U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2} \text{ تصبح } U_2 + U_4 = \frac{25}{2}$$

$$\text{بما أن } U_3 \text{ الوسط الهندسي لـ } U_2 \text{ و } U_4 \text{ فإن } U_2 \times U_4 = U_3^2 = 25$$

$$(I) \dots \begin{cases} U_2 \times U_4 = 25 \\ U_2 + U_4 = \frac{25}{2} \end{cases} \text{ إذن } \dots$$

$$\text{بعد حل الجملة (I) نجد } U_1 = \frac{5}{4}, U_2 = \frac{5}{2}, U_3 = 5, U_4 = 10, U_5 = 20$$

2 - البرهان بالتراجع

1 - 2 أهمية البرهان بالتراجع

في الرياضيات توجد بعض الخواص تتعلق بعدد طبيعي n مثلاً

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ نرمز إلى هذه الخاصية بـ } P_n$$

$$\text{- نستطيع القول أن } P_1 \text{ صحيحة لأن } 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$P_2 \text{ صحيحة لأن } 1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$P_3 \text{ صحيحة لأن } 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

المتتاليات التراجعية - البرهان بال

لكن هل P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟ إذا كان كذلك فكيف نبينه ؟ العلم أنه لا يمكن التحقق من ذلك بالحساب لأن مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} غير منتهية البرهان بالتراجع يسمح لنا باستنتاج صحة الخاصية P_n من أجل كل $n \geq 1$ وبالتالي فهو وسيلة تسمح بالمرور من المنتهي إلى اللامنتهي .

2 - 2 مبدأ البرهان بالتراجع :

للبرهان على أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نتبع خطوتين أساسيتين هما :

(1) نتحقق أن P_{n_0} صحيحة .

(2) نفرض أن الخاصية P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي و على هذا الفرض نبين أن الخاصية P_{n+1} صحيحة

إذا تحقق الشرطان السابقان معا نستنتج أن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$

ملاحظة

الفرضية " P_n صحيحة" تسمى فرضية التراجع .

تمرين تدريبي 1

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 يكون :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ الحل :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي الخاصية P_n

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P_1 \text{ صحيحة لأن } 1^2 = 1 \text{ و } \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة P_{n+1} أي :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

تطبيقات نموذجية



تطبيق 1

دراسة اتجاه تغير متتالية

ما هي المتتاليات الرتيبة من بين المتتاليات العطاة ؟

$$(1) \quad U_n = 3n + 5 \quad (ج) \quad U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n$$

$$(ب) \quad U_n = n! \quad (د) \quad U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 4 \quad \text{و} \quad U_0 = 7$$

الحل :

لعرفة اتجاه تغير متتالية نعين إشارة القدار $U_{n+1} - U_n$

$$(1) \quad U_{n+1} - U_n = [3(n+1) + 5] - (3n + 5) = 3$$

بما أن من كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن (U_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N} .

$$(ب) \quad n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{مع} \quad n \geq 1$$

$$U_{n+1} - U_n = (n+1)n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 - n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 [n+1-1] = (n!) \times n$$

بما أن $n! > 0$ و $n \geq 1$ فإن $(n!) \times n > 0$ وبالتالي للمتتالية (U_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N}^* .

$$(ج) \quad U_{n+1} - U_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} - (n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - n\right] = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $2^{n+1} > 2^n$ يقبل طرفي المتباينة نجد $1 > \frac{1}{2^{n+1}}$

و بطرح 1 من طرفي هذه الأخيرة نجد $0 > \frac{1}{2^{n+1}} - 1$ أي $U_{n+1} - U_n < 0$

بالتالي (U_n) متناقصة تماماً على \mathbb{N}

$$(د) \quad U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 4 - U_n = -\frac{2}{5}U_n + 4 = -\frac{2}{5}(U_n - 10)$$

لعرفة إشارة $U_{n+1} - U_n$ لابد من معرفة إشارة $U_n - 10$.

من أجل $n=0$ نجد $U_0 - 10 < 0$ وبالتالي $U_{n+1} - U_n > 0$ صحيحة من أجل $n=0$.

هل الخاصية $U_n - 10 < 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي ؟ للإجابة عن ذلك

نستعمل البرهان بالتراجع :

نسمي P_n الخاصية $U_n - 10 < 0$

- P_0 صحيحة لأن $U_0 - 10 < 0$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\text{لأن} \quad 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$$

إذن الخاصية P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

تمرين تدريبي 2

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9

✓ الحل

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية "العدد $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9"

- بما أن $10^0 - 1 = 0$ و الصفر يقبل القسمة على 9 فإن P_0 صحيحة.

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $10^n - 1 = 9k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $10^{n+1} - 1 = 9k'$

لتوظيف فرضية التراجع نكتب :

$$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1 = 10^n(10 - 1) - 1 = (10^n - 1) + 9 \times 10^n$$

$$= 9k + 9 \times 10^n = 9(k + 10^n) = 9k'$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

تمرين تدريبي 3

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $2^n > n$.

✓ الحل :

- P_1 صحيحة لأن $2^1 > 1$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ أي $2^n > n$ و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة

أي $2^{n+1} > n+1$.

بضرب طرفي المتباينة $2^n > n$ بالعدد 2 نجد $(1) \quad 2^{n+1} > 2n$

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $2n \geq n+1$... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $2^{n+1} > n+1$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

- نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n - 10 < 0$ ونرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} - 10 < 0$

$$U_{n+1} - 10 = \frac{3}{5} U_n + 4 - 10 = \frac{3}{5} U_n - 6 = \frac{3}{5} (U_n - 10)$$

بما أن $U_n - 10 < 0$ فإن $\frac{3}{5} (U_n - 10) < 0$ وعليه فإن $U_{n+1} - 10 < 0$ إذن P_{n+1} صحيحة وبالتالي الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n وعليه فالمتتالية (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

تطبيق 2 -

نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتاليتين (U_n) و (V_n) كما يلي:
 $V_n = U_{2n} - U_n$ و $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
 برهن أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

الحل:

لكي تكون المتتالية (V_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} يجب أن يكون $V_{n+1} - V_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= (U_{2n+2} - U_{n+1}) - (U_{2n} - U_n) = (U_{2n+2} - U_{2n}) - (U_{n+1} - U_n) \\ &= \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{2(n+1) + 2n + 1 - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \end{aligned}$$

بما أن $\frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$ فإن $V_{n+1} - V_n > 0$ وبالتالي المتتالية (V_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

تطبيق 3 -

(U_n) متتالية هندسية أساسها 5 وحدها الأول -2

(1) عبر عن U_n بدلالة n

(2) احسب $U_1 + U_2 + \dots + U_9$

(3) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة:

$V_n = U_{2n}$ احسب المجموع $V_1 + V_2 + \dots + V_n$ بدلالة n .

الحل

(1) $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ حيث q هو الأساس و U_1 الحد الأول

بتعويض قيمة q و U_1 في عبارة U_n نجد $U_n = -2 \times 5^{n-1}$

$$U_1 + U_2 + \dots + U_9 = U_1 \times \frac{1-q^9}{1-q} = -2 \times \frac{1-5^9}{1-5} = \frac{1-5^9}{2} \quad (2)$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \frac{-2 \times 5^{2n+2-1}}{-2 \times 5^{2n-1}} = 5^2 = 25 \quad (3)$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q' = 25$ وحدها الأول $V_1 = U_2$ ومنه

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \dots + V_n &= V_1 \times \frac{1-q'^n}{1-q'} = U_2 \times \frac{1-(25)^n}{1-25} = U_2 \times \frac{1-5^{2n}}{1-25} \\ &= -10 \times \frac{1-5^{2n}}{1-25} = \frac{5}{12} (1-5^{2n}) \end{aligned}$$

تطبيق 4 -

تعيين أساس متتالية هندسية

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بحيث من أجل كل عدد طبيعي n معلوم:

$$\sum_{p=1}^n U_p = \frac{3^n - 1}{2}$$

(1) احسب $U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9$

(2) بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول U_1 .

الحل:

$$S_1 = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{3^3 - 1}{2} = 13 \quad (1)$$

$$S_2 = U_1 + U_2 + \dots + U_9 = \frac{3^9 - 1}{2} = 9841$$

$$S_2 - S_1 = U_4 + U_5 + \dots + U_9 = 9841 - 13 = 9828$$

$$(1) \dots U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \quad (2)$$

$$(2) \dots U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$U_n = \frac{3^n - 1}{2} - \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^n - 3^{n-1}}{2} = 3^{n-1}$$

بما أن (U_n) معرفة على \mathbb{N}^* فإن حدها الأول هو $U_1 = 3^{1-1} = 1$ وأساسها $r = 3$.

تطبيق 5 .

البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:
 $U_1 = 1$ و $U_2 = 3$ و $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$
 (1) من أجل $n \geq 1$ نضع $V_n = U_{n+1} - U_n$
 (أ) ماهي طبيعة المتتالية (V_n) ؟
 (ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n .
 (2) بين بالتراجع أن $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$ ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

✓ الحل :

(1) $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = 3U_{n+1} - 2U_n - U_{n+1} = 2U_{n+1} - 2U_n = 2(U_{n+1} - U_n) = 2V_n$
 ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $V_1 = U_2 - U_1 = 2$
 (ب) $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$
 (2) نسمي P_n الخاصية $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$

P_1 صحيحة لأن $U_2 - U_1 = 3 - 1 = 2$ و $\sum_{r=1}^1 V_r = V_1 = 2$
 • نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $U_{n+1} - U_1 = \sum_{r=1}^n V_r$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2} - U_1 = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$
 $U_{n+2} - U_1 = 3U_{n+1} - 2U_n - U_1 = 2(U_{n+1} - U_n) + U_{n+1} - U_1$
 $= 2V_n + \sum_{r=1}^n V_r = V_{n+1} + \sum_{r=1}^n V_r = \sum_{r=1}^{n+1} V_r$
 إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.

لدينا $U_n - U_1 = \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

ومنه $U_n = U_1 + \sum_{r=1}^{n-1} V_r$

$$U_n = U_1 + V_1 \frac{1-q^{n-1}}{1-q} = 1 + 2 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = -1 + 2^n$$

تطبيق 6 .

تعيين أساس متتالية هندسية

نعتبر (U_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي الواحد بالعلاقة $U_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} U_n$ و $U_1 = a$ مع a عدد حقيقي معطى . و لتكن (V_n) متتالية الأعداد الحقيقية معرفة من أجل كل طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = 13U_n - 4$
 (1) بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها k
 (2) اكتب V_n بدلالة n و a ثم استنتج U_n بدلالة n و a

✓ الحل :

$$V_{n+1} = 13U_{n+1} - 4 = 13 \times \frac{4}{10} - 13 \times \frac{3}{10} U_n - 4 = \frac{26}{5} - \frac{39}{10} \left(\frac{V_n + 4}{13} \right) - 4$$

$$= \frac{26}{5} - \frac{3}{10} (V_n + 4) - 4 = \frac{26}{5} - \frac{12}{10} - \frac{3}{10} V_n - 4 = -\frac{3}{4} V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $k = -\frac{3}{10}$ وحدها الأول $V_1 = 13U_1 - 4 = 13a - 4$

$$V_n = V_1 \times k^{n-1} = (13a - 4) \times \left(-\frac{3}{10} \right)^{n-1}$$

$$U_n = \frac{V_n + 4}{13} = \frac{(13a - 4) \left(-\frac{3}{10} \right)^{n-1} + 4}{13}$$

تطبيق 7 .

متتالية كثير حدود . المتتالية الهندسية

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = a$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + n^2 + n$ (1)
 (أ) أوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ بحيث المتتالية (a_n) ذات الحد العام $a_n = P(n)$ تحقق العلاقة (1)
 (2) بين أن المتتالية (V_n) ذات الحد العام $V_n = U_n - a_n$ هندسية.
 (3) اكتب V_n ثم U_n بدلالة n و a

✓ الحل :

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \quad \text{حيث } \alpha = 0$$

إذن $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \delta$ تحقق العلاقة (1) وهذا معناه أن :

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \delta = \frac{1}{2} \alpha n^2 + \frac{1}{2} \beta n + \frac{1}{2} \delta + n^2 + n$$

بعد النشر والتبسيط نجد :

$$(2) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{2}\alpha - 1\right)n^2 + \left(2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 1\right)n + \alpha + \beta + \delta - \frac{1}{2}\delta = 0$$

المساواة (2) محققة من أجل كل عدد طبيعي إذا فقط إذا كان :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0 \\ 2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 1 = 0 \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}\delta = 0 \end{cases}$$

بعد حل هذه الجملة نجد $\alpha = 0$ و $\beta = -6$ و $\delta = 8$

$$P(x) = 2x^2 - 6x + 8$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n^2 + n - 2(n+1)^2 + 6(n+1) - 8 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}(U_n - 2n^2 + 6n - 8) = \frac{1}{2}[U_n - (2n^2 - 6n + 8)]$$

$$= \frac{1}{2}(U_n - a_n) = \frac{1}{2}V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0 = U_0 - a_0 = a - 8$

$$V_n = V_0 \times q^n = (a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (3)$$

$$U_n = V_n + a_n = (a-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 6n + 8$$

تطبيق 8

مجموعة تعيين ثلاث حدود متتابة من متتالية هندسية

a, b, c ثلاثة حدود متتابة من متتالية هندسية حيث $a, b, c = 64$

$$a, b, c \text{ عين الأعداد الحقيقية } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{8}$$

الحل :

بما أن a, b, c ثلاثة حدود متتابة من متتالية هندسية فإن $ac = b^2$

$$\begin{cases} b^2 = 64 \\ ac = b^2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} abc = 64 \\ ac = b^2 \end{cases}$$

بتعويض قيمة b في المساواة $\frac{7}{8} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ نجد $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8}$

$$\text{إذن (1) } \dots\dots\dots \begin{cases} ac = 16 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$(1) \text{ تكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{16}{a}} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{1}{a} + \frac{a}{16} = \frac{5}{8} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{16a} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\text{تكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ \frac{16+a^2}{2a} = 5 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} c = \frac{16}{a} \\ a^2 - 10a + 16 = 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 10a + 16 = 0$$

$$\Delta' = 25 - (1)(16) = 9 \text{ ومنه } a_1 = 8 \text{ و } a_2 = 2$$

$$a = a_1 \text{ يكافئ } c_1 = \frac{16}{8} = 2 \text{ منه } (a, b, c) = (8, 4, 2)$$

$$a = a_2 \text{ يكافئ } c_2 = \frac{16}{2} = 8 \text{ منه } (a, b, c) = (2, 4, 8)$$

تطبيق 9

مجموعة البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n :

$$T_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \text{ و } S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1)$$

برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n : $S_n = T_n$

الحل :

نسعى P_n الخاصية " $S_n = T_n$ "

$$P_1 \text{ صحيحة لأن } S_1 = 1 \times 2 = 2 \text{ و } T_1 = \frac{1}{3} \times 1(1+1)(1+2) = 2$$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $S_n = T_n$ ونبرهن صحة P_{n+1} أي

$$S_{n+1} = T_{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (n+1)(n+2)$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2)$$

$$= S_n + (n+1)(n+2) = T_n + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3) = T_{n+1}$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق 10 .

البرهان بالتراجع وإثبات متباينة

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي P_n الخاصية $3^n \geq (n+2)^2$

(1) هل P_0, P_1, P_2, P_3 صحيحة؟

(2) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ P_n صحيحة

✓ الحل :

(1) بما أن $3^0 = 1$ و $(0+2)^2 = 4$ فإن المتباينة $1 \geq 4$ خاطئة وبالتالي P_0 خاطئة .

- بما أن $3^1 = 3$ و $(1+2)^2 = 9$ والمتباينة $3 \geq 9$ خاطئة فإن P_1 خاطئة

- بما أن $3^2 = 9$ و $(2+2)^2 = 16$ والمتباينة $9 \geq 16$ خاطئة فإن P_2 خاطئة

- بما أن $3^3 = 27$ و $(3+2)^2 = 25$ والمتباينة $27 \geq 25$ صحيحة وبالتالي P_3 صحيحة

(2) P_3 صحيحة من السؤال 1 .

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $3^n \geq (n+2)^2$ ونرهن أن P_{n+1}

صحيحة أي $3^{n+1} \geq (n+3)^2$

بضرب المتباينة $3^n \geq (n+2)^2$ بالعند 3 نجد (1) $3^{n+1} \geq 3(n+2)^2$

لكي تكون P_{n+1} صحيحة يجب أن يكون (2) $3(n+2)^2 \geq (n+3)^2$

(2) تكافئ $3(n+2)^2 - (n+3)^2 \geq 0$ تكافئ $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$

x	$\frac{-6-\sqrt{12}}{4}$	$\frac{-6+\sqrt{12}}{4}$	$+\infty$
			$-\infty$
$2x^2 + 6x + 3$	+	-	+

من الجدول نستنتج أن $2n^2 + 6n + 3 \geq 0$ من أجل كل عدد طبيعي و بالتالي المتباينة

(2) صحيحة إذن من (1) و (2) نستنتج أن $3^{n+1} \geq (n+3)^2$ و عليه فالخاصية P_n صحيحة

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

تطبيق 11 .

البرهان بالتراجع وإثبات متباينة

نضع $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ حيث $n \geq 1$ و يقرأ "عاطلي n "

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n! \geq 2^{n-1}$

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $n! \geq 2^{n-1}$ "

P_1 صحيحة لأن $1! = 1$ و $2^0 = 1$ والمتباينة $1 \geq 1$ صحيحة .

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $n! \geq 2^{n-1}$

و نرهن صحة P_{n+1} أي $(n+1)! \geq 2^n$

بضرب طرفي المتباينة $n! \geq 2^{n-1}$ بالعند $(n+1)$ نجد $(n+1) \times (n!) \geq (n+1)2^{n-1}$ لكن

$(n+1) \times (n!) = (n+1)!$ و عليه المتباينة الأخيرة تصبح

(1) $(n+1)! \geq (n+1) \times 2^{n-1}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \geq 2$

بضرب طرفي المتباينة $n+1 \geq 2$ بالعند 2^{n-1} نجد $2^n \geq (n+1)2^{n-1}$... (2)

من (1) و (2) نجد $(n+1)! \geq 2^n$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي الخاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق 12 .

البرهان بالتراجع وقابلية القسمة

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6 .

✓ الحل

نسمي P_n الخاصية " $5^{2n+1} - 5$ يقبل القسمة على 6"

P_0 صحيحة لأن $5^{0+1} - 5 = 0$ و الصفر يقبل القسمة على 6 .

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $5^{2n+1} - 5 = 6\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ و نرهن

صحة P_{n+1} أي $5^{2n+3} - 5 = 6\beta$ مع $\beta \in \mathbb{N}$

$5^{2n+3} - 5 = 5^{2n+1} \times 5^2 - 5 = 5^{2n+1}(24+1) - 5 = 5^{2n+1} \times 24 + 5^{2n+1} - 5$

$= 6\alpha + 24 \times 5^{2n+1} = 6(\alpha + 4 \times 5^{2n+1}) = 6\beta$

إذن P_{n+1} صحيحة و بالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي .

تطبيق 16

البرهان بالتراجع وإثبات متباينة مزدوجة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n :
 $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$
 (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$
 (2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماماً.

✓ الحل

(1) نسمي P_n الخاصية $U_n > 0$

P_0 صحيحة لأن $U_0 > 0$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n > 0$

و نبرهن صحة P_{n+1} أي $U_{n+1} > 0$

بإضافة 2 إلى حدود المتباينة $U_n > 0$ نتحصل على $U_n + 2 > 2$

و بجذر حدود هذه الأخيرة نجد $0 < \sqrt{2} < \sqrt{2+U_n}$ أي $0 < U_{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة وعليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n = \frac{2+U_n - U_n^2}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{(U_n - 2)(-U_n - 1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n} \quad (2)$$

بما أن $U_n > 0$ فإن $-U_n - 1 < 0$ و $U_n - 2 < 0$

و بالتالي $\frac{(U_n - 2)(-U_n - 1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n} > 0$

إذن (U_n) متتالية متزايدة تماماً على \mathbb{N}

تطبيق 17

البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يوجد عدنان طبيعيان a_n و b_n بحيث $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$

✓ الحل :

نسمي P_n الخاصية $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$

P_1 صحيحة لأن $(2+\sqrt{3})^1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ حيث $a_1 = 2$ و $b_1 = 1$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n \times \sqrt{3} \quad (1)$$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $(2+\sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \times \sqrt{3}$

بضرب طرفي المساواة (1) بالعدد $2+\sqrt{3}$ نجد،

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$

بعد النشر و التبسيط نجد :

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2a_n + 3b_n) + \sqrt{3}(2b_n + a_n) \quad (2)$$

بوضع $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ و $b_{n+1} = 2b_n + a_n$

للمساواة (2) تصبح :

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}$$

وبما أن a_n و b_n عدنان طبيعيان فإن a_{n+1} و b_{n+1} عدنان طبيعيان.

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

تطبيق 18

إثبات بالتراجع صحة تخمين

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_1 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n}$

(1) احسب U_2 , U_3 , U_4 . ضع النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال

(2) خمن نتيجة عبارة الحد العام U_n .

(3) برهن بالتراجع صحة التخمين المحصل عليه

✓ الحل :

$$U_2 = \frac{2U_1 - 1}{U_1} = \frac{2 \times 2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \quad (1) \quad \text{و} \quad U_3 = \frac{2U_2 - 1}{U_2} = \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \text{أيضا} \quad U_4 = \frac{2U_3 - 1}{U_3} = \frac{2 \times \frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

(2) نلاحظ أن البسط و المقام عدنان طبيعيان متناهيان إذن يمكن كتابة $U_n = \frac{n+1}{n}$

(3) نسمي P_n الخاصية $U_n = \frac{n+1}{n}$

P_1 صحيحة لأن $U_1 = \frac{1+1}{1} = 2$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي أي $U_n = \frac{n+1}{n}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} = \frac{2\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+2-n}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

إذن P_{n+1} صحيحة و منه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

تطبيق 10 تخمين عبارة حد عام لمتتالية وإثبات صحتها بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - 3$

(1) احسب U_1, U_2, U_3, U_4, U_5

(2) تخمن عبارة الحد العام U_n ثم برهن على صحتها

(3) بحساب $U_n - 3$ من أجل كل $n \geq 0$ غير عن U_n بدلالة n (طريقة ثانية)

الحل

$$U_3 = 2U_2 - 3 = -5, \quad U_2 = 2U_1 - 3 = -1, \quad U_1 = 2U_0 - 3 = 1 \quad (1)$$

$$U_5 = 2U_4 - 3 = -29, \quad U_4 = 2U_3 - 3 = -13$$

(2) يمكن كتابة

$$U_4 = -2^4 + 3, \quad U_3 = -2^3 + 3, \quad U_2 = -2^2 + 3, \quad U_1 = -2^1 + 3$$

$$U_0 = -2^0 + 3$$

وبالتالي يمكن كتابة U_n على الشكل $U_n = -2^n + 3$

نسعى P_n الخاصية $U_n = -2^n + 3$

P_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 = -2^0 + 3$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n = -2^n + 3$

ونبرهن صحة P_{n+1} أي $U_{n+1} = -2^{n+1} + 3$

$$U_{n+1} = 2U_n - 3 = 2(-2^n + 3) - 3 = -2^{n+1} + 3$$

منه P_{n+1} صحيحة وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

$$U_0 - 3 = 2 - 3 = -1 = -2^0 \quad (3)$$

$$U_1 - 3 = 1 - 3 = -2 = -2^1$$

$$U_2 - 3 = -1 - 3 = -4 = -2^2$$

$$U_3 - 3 = -5 - 3 = -8 = -2^3$$

$$U_4 - 3 = -13 - 3 = -16 = -2^4$$

نلاحظ أن $U_n - 3$ تكتب على الشكل

$$-2^n \quad \text{أي } U_n = -2^n + 3 \quad (\text{يمكنك إثبات ذلك بالتراجع})$$

تطبيق 11 تخمين عبارة حد عام لمتتالية وإثبات صحتها بالتراجع

(Q_n) متتالية كثيرة حدود معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ $Q_0(x) = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$Q_{n+1}(x) = x Q_n(x+1)$$

(1) اوجد $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ بدلالة x

(2) تخمن كتابة $Q_n(x)$ على شكل جداء عوامل

(3) برهن صحة هذا التخمين

الحل

$$Q_1(x) = x Q_0(x+1) = x \times 1 = x \quad (1)$$

$$Q_2(x) = x Q_1(x+1) = x(1+x)$$

$$Q_3(x) = x Q_2(x+1) = x(1+x)(x+2)$$

(2) من عبارات $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ نستنتج أنه يمكن كتابة

$$Q_n(x) = (x+0)(x+1) \times (x+2) \times \dots \times (x+n-1)$$

(3) نسمي P_n الخاصية " $Q_n(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n-1)$ "

P_1 صحيحة لأن $Q_1(x) = (x+0) = x$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي غير معدوم أي

$$Q_n(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n-1)$$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي

$$Q_{n+1}(x) = x(x+1) \times \dots \times (x+n)$$

$$Q_{n+1}(x) = x Q_n(x+1) = x \times (x+1)(x+2) \times \dots \times (x+1+n-1)$$

$$= x \times (x+1)(x+2) \times \dots \times (x+n)$$

إذن P_{n+1} صحيحة و عليه فإن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

البرهان بالتراجع وإثبات المساواة

تطبيق 12

θ عدد حقيقي من المجال $0, \frac{\pi}{2}$ و (U_n) متتالية معرفة بـ

$$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \quad U_0 = 2 \cos \theta$$

(1) احسب U_1 و U_2

(2) بين بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي $U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$

✓ الحل

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} \quad (1)$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

بما أن $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ وبالتالي $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ فإن $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$U_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$U_2 = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} \right)} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{4}} = 2 \cos \frac{\theta}{4}$$

$$U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n} \quad \text{نسمي } P_n \text{ الخاصية}$$

$$U_0 = 2 \cos \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2^0}$$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$ ونبرهن

$$\text{صحة } P_{n+1} \text{ أي } U_{n+1} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} = \sqrt{2+2\cos \frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2^n} \right)}$$

$$= \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \right|$$

$$U_{n+1} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \quad \text{وبالتالي } \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} > 0 \text{ فإن } \frac{\theta}{2^{n+1}} \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

بما أن P_n صحيحة وعلية فإن P_{n+1} صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.

تمارين و مسائل



1 - (V_n) متتالية معرفة بـ $V_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $V_{n+1} = 3V_n - 1$

احسب V_2 ثم عبر عن V_{n+2} بدلالة V_n .

2 - (U_n) متتالية عبارة حدها العام $U_n = \frac{n}{n^2 + 4}$

عبر عن U_{n+1} ، U_{n-3} و U_{2n} بدلالة n .

3 - عين المتتالية الرتيبة من بين المتتاليات التالية :

$$(1) \quad U_n = -2n + 1 \quad (2) \quad U_n = \frac{n+2}{n+3}$$

$$(3) \quad U_n = n! \quad (4) \quad U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$(5) \quad U_0 = 4 \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{5}{6}U_n + 2$$

4 - من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم $U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{-1}{n^2}$

ادرس رتبة المتتاليات التالية (U_n) ، (V_n) ، $(U_n + V_n)$ ، $(U_n \times V_n)$

5 - نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 2$ و $U_1 = 4$ و $U_{n+1} = 4U_n - U_{n-1}$

(1) اوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$

(2) (V_n) متتالية بحيث $V_n = U_{n+1} - aU_n$ مع $n \in \mathbb{N}$

بين أن (V_n) هندسية أساسها b .

(3) (W_n) متتالية بحيث $W_n = U_{n+1} - bU_n$ مع $n \in \mathbb{N}$

بين أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها a .

(4) اعط عبارة صريحة لـ V_n و W_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

6 - a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة و $a \neq 0$ ، بحيث a ، b ، c بهذا الترتيب

حدود متتالية من متتالية هندسية أساسها q و $3a$ ، $2b$ ، c بهذا الترتيب حدود متتالية من متتالية حسابية. احسب q .

7 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n يكون $\sum_{p=1}^n U_p = 2n^2 + 7n$ بين أن (U_n) متتالية حسابية معينا أساسها.

8 - (U_n) متتالية معرفة بـ U_0 و علاقة تراجعية $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+3U_n}$ احسب الأربعة الحدود الأولى لهذه المتتالية ثم استنتج مقلوب كل منها ماذا تلاحظ؟
2) باستعمال المتتالية (V_n) حيث $V_n = \frac{1}{U_n}$ اوجد عبارة U_n بدلالة n .

9 - نريد حفر بئر تكلفة المتر الأول هي $1000 DA$ و كلما تعمقنا في الحفر تزداد تكلفة للتر الواحد بمقدار ثابت هو $1500 DA$.
1) ما هي تكلفة البئر إذا حفرنا 30 متر؟
2) ما هو العمق الذي نصل إليه إذا كانت لدينا ميزانية $16000 DA$ ؟

10 - (U_n) متتالية هندسية بحيث $U_1 + U_2 + U_3 = 465$ ، $U_1 \times U_2 \times U_3 = 421875$ احسب U_5 .

11 - 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم،
$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2) من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 نضع $S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + (n-1) \times 2^{n-2}$
برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 2$ يكون $S_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1$
3) a عدد حقيقي موجب تماما.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم $(1+a)^n \geq 1+na$

12 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون،

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots (2n) \quad (1)$$

$$14n^3 + 9n^2 + n \quad (2)$$

$$2^{3n} - 1 \quad (3)$$

13 - 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $5 + 4 \times 2^{2n}$ يقبل القسمة على 3 .
2) نضع $L_n = 2^{2n} [(2^{2n+1} - 1) - 1]$

1) بين أن $L_{n+1} - 16L_n = 3Q_n$ حيث $Q_n = 5 + 4 \times 2^{2n}$
2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي L_n يقبل القسمة على 9 .

14 - a طول القطعة $[AB]$ و لتكن M_1 منتصف $[AB]$ ، M_2 منتصف $[BM_1]$ ، M_3 منتصف $[M_1M_2]$ ، M_n منتصف القطعة $[M_{n-2}M_{n-1}]$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $AM_n = \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(-1)^r a}{2^r} + a$

15 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n + 3}$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \geq 0$
2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

16 - x عدد حقيقي، نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n
 $C_n = \cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$

1) بين أن $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

2) حول العبارتين التاليتين إلى مجاميع $\sin(nx) \cos(nx)$ و $\sin x \cos(2n+1)x$
3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n و من أجل كل عدد حقيقي x

$$C_n = \frac{\cos(nx) \sin(nx)}{\sin x} \quad \text{لدينا } k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi$$

17 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n

$$\frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \tan\left(\frac{x}{2^2}\right) + \dots + \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $x \neq 2k\pi$

18 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم

$$\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \times \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

19 - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

(1) احسب S_1, S_2, S_3, S_4

(2) تخمن عبارة S_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

20 - x عدد حقيقي كفي

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = (x-1) \sum_{r=0}^{n-1} x^r$$

(2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة.

21 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

(1) احسب U_1, U_2, U_3, U_4

(2) تخمن عبارة U_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

1 - النهايات في اللانهاية والمستقيمات المقاربة

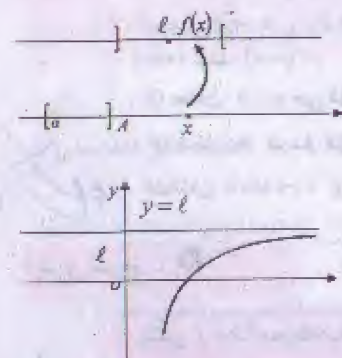
1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ والمستقيم المقارب الأفقي

القول ان الدالة f لها نهاية حقيقية ℓ عند $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x الكبيرة (أي من أجل كل قيم x من المجال $]A, +\infty[$)
و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ مقارب أفقي لنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

ملاحظة

نعرف بطريقة ماثلة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$



19 - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

(1) احسب S_1, S_2, S_3, S_4

(2) تخمن عبارة S_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

20 - x عدد حقيقي كفي

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = (x-1) \sum_{r=0}^{n-1} x^r$$

(2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة.

21 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

(1) احسب U_1, U_2, U_3, U_4

(2) تخمن عبارة U_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

1 - النهايات في اللانهاية والمستقيمات المقاربة

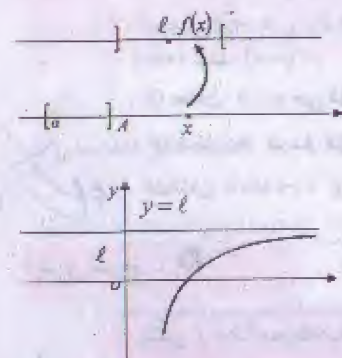
1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ والمستقيم المقارب الأفقي

القول ان الدالة f لها نهاية حقيقية ℓ عند $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x الكبيرة (أي من أجل كل قيم x من المجال $]A, +\infty[$)
و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ مقارب أفقي لنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

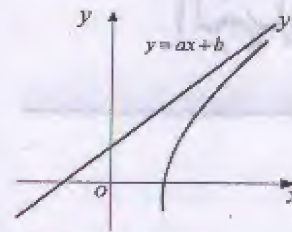
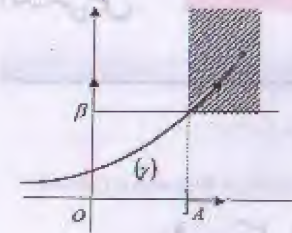
ملاحظة

نعرف بطريقة ماثلة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$



مثال -

الدوال $x \mapsto \frac{1}{x}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ، $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x}$ لها النهاية صفر عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$



2 - 1 النهاية الغير المنتهية عند $(+\infty)$

نقول ان الدالة f لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح من الشكل $]\beta, +\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ للاخوذة من اجل كل قيم x الكبيرة (اي من اجل كل قيم x من المجال $[A, +\infty[$) وتكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

إذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ مع $f(x) = ax + b + h(x)$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $(-\infty)$

مثال -

الدوال $x \mapsto \sqrt{x}$ ، ($n \in \mathbb{N}^*$) مع $x \mapsto x^n$ ، $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto x$ لها النهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$ إذا كان n زوجي فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ وإذا كان n فردي فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ ليست لهما نهاية عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$

تمرين تدريبي - 1

لتكن f دالة معرفة بالمعبارة $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أوجد العدد الحقيقي A بحيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) > 2,9$ و $f(x) < 3,1$

الحل ✓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3 \quad (1)$$

(2) نقول ان $2,9 < f(x) < 3,1$ يعني بذلك $3,001 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$

وبما أننا نهتم بالقيم الكبرى لـ x فإن $x-1 > 0$

بضرب حدود المتباينة $3,001 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$ بالعدد $(x-1)$ نجد:

$$3,001(x-1) > 3x-2 > 2,999(x-1)$$

$$0,001x - 3,001 > -2 > -0,001x - 2,999$$

حل المتراجحة $-0,001x - 2,999 > -2$: $0,001x > -0,999$ أي $x > -999$

$$\begin{aligned} (1) & \quad -2 > -0,001x - 2,999 \dots\dots\dots \\ (2) & \quad 0,001x - 3,001 > -2 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

بعد حل المتراجحة (1) نجد $x > -999$

بعد حل المتراجحة (2) نجد $x > 1001$

إذن مجموعة حلول الجملة ① هي $[1001, +\infty[$

و بالتالي يمكن أخذ $A = 1001$

أي كلما أخذ x قيمة أكبر من A فإن قيم $f(x)$ تتراكم حول القيمة 3.

تمرين تدريبي - 2

من اجل الدالة f المعرفة على \mathbb{R} نعلم ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ و نعلم ايضا لـ $x > 5$ فإن $f(x) > 4$

ولـ $x < -8$ فإن $f(x) - x + 1 < 0$ ماذا نستنتج بالنسبة للمنحنى الدالة f ؟

الحل ✓

العلومة « $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ » تبين لنا ان المستقيم ذا المعادلة $y = 4$ مقارب افقي للمنحنى المثل للدالة f في جوار $(+\infty)$

العلومتان « $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ » و « $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ » تبينان ان المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى المثل للدالة f عند $(-\infty)$.

العلومة « إذا كانت $x > 5$ فإن $f(x) > 4$ » تبين لنا ايضا ان المنحنى المثل للدالة f يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y = 4$ على المجال $]5, +\infty[$

العلومة « إذا كانت $x < -8$ فإن $f(x) - x + 1 < 0$ » تبين لنا ان المنحنى يقع تحت المستقيم القارب المائل ذي المعادلة $y = x - 1$ على $]-\infty, -8[$

تمرين تدريبي - 3

لتكن f دالة معرفة كما يلي $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$ مع $x \neq 0$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ماذا تستنتج من حساب النهايتين السابقتين بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(2) نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y = x+2$ مقارب

مائل للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- بما أن $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x}$ فإنه إذا كان $x > 0$ فإن المنحنى يقع فوق المستقيم (d)

وإذا كان $x < 0$ فإن المنحنى يقع تحت (d) حيث $y = x+2$ (d)

2 - نهاية دالة عند عدد حقيقي a

نرمز بـ D_f إلى مجموعة تعريف الدالة f

و a عدد حقيقي ينتمي إلى D_f

أو a لا ينتمي إلى D_f (ا حاد لـ D_f)

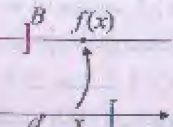
1 - 2 النهاية المنتهية عند a - المستقيم المقارب العمودي

نقول أن الدالة f لها النهاية $(+\infty)$ عند a

يعني أن كل مجال من الشكل $[\beta, +\infty)$ يشمل كل

قيم $f(x)$ للأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a

(أي من أجل كل x من المجال $[a-\alpha, a+\alpha]$ و من D_f)



و نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم

ذا المعادلة $x = a$ مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة f

ملاحظة

(1) نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

(2) نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $(-\infty)$ لما x يؤول إلى a

يعني أن $-f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى a

مثال -

لتكن f و g دالتين معرفتين على $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

- الصفر هو حاد لمجموعة تعريف f .

مهما كانت قيمة العدد الحقيقي M كبيرة فالأعداد $f(x)$ تتجاوز قيمة M

من أجل كل قيمة x من $]0, \frac{1}{M}]$ لأن المتباينة $\frac{1}{x} > M$ تكون صحيحة

عندما يكون $0 < x < \frac{1}{M}$ ونكتب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

- بنفس الكيفية السابقة نبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2 - 2 النهاية الحقيقية (المنتهى) عند a

نقول أن العدد الحقيقي ℓ هو نهاية الدالة f لما x يقترب من a

يعني أن كل مجال مفتوح مركزه L يشمل كل قيم $f(x)$ للأخوذة من أجل كل قيم x

القريبة من a (أي من المجال $[a-\alpha, a+\alpha]$ و من D_f)

و نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

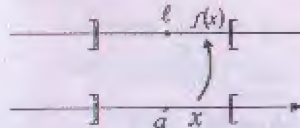
هذا التعريف يعني أن المسافة بين $f(x)$ و ℓ

تقترب من الصفر.

إذن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ تعني أن $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0$

نتيجة

إذا كان a من D_f و f لها نهاية ℓ عند a فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



خاصية

إذا كانت f لها نهاية ℓ عند a فإن هذه النهاية وحيدة

مثال

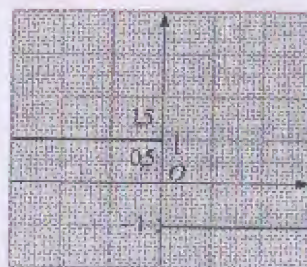
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

يمكننا أن نثبت صحة هاتين النهايتين باستعمال نظرية الحصر.

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون للدالة نهاية عند قيمة من مجموعة تعريفها.

مثال



f دالة تمثيلها البياني كما في الشكل

$f(0)=1$ لكن f ليس نهاية لـ f لا x

يقول إلى الصفر.

لأن باعتبار المجال المفتوح $]0.5, 1.5[$ فإنه

من أجل كل قيم x القريبة من الصفر

وأكبر تماماً منه يكون $f(x) = -1$

لكن -1 لا ينتمي إلى المجال I .

• النهاية من اليمين و من اليسار عند a

يحصل وأن دالة لا تقبل نهاية (حقيقية أو غير منتهية) عند a لكن اقتصارها على مجال من

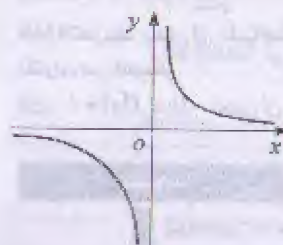
الشكل $]a, b[$ لها نهاية ℓ عند a .

نقول عندئذ أن f لها نهاية من اليمين عند a و نكتب $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$

بنفس الطريقة إذا كان اقتصار f على المجال $]c, a[$ يقبل نهاية ℓ عند a نقول أن f

تقبل نهاية من اليسار عند a و نكتب $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$

مثال



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad f: x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

(2) f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sqrt{x^2}}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2$$

الدالة f ليس لها نهاية عند الصفر.



تمرين تدريبي 1

f دالة معرفة بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x+5}$ لها النهاية 3 عند 4

أوجد مجال I مركزه 3 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2.99, 3.01[$

✓ الحل:

القول أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2.99, 3.01[$ يعني $2.99 < f(x) < 3.01$

أي $2.99 < \sqrt{x+5} < 3.01$ بالتربيع نجد $8.9401 < x+5 < 9.0901$

و بطرح 5 من حدود هذه الأخيرة نجد $3.9401 < x < 4.0901$ إذن $I =]3.9401, 4.0901[$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$	5
		$+\infty$	$-\infty$	

استنتج الاستقيمت المقاربة للمنحنى البياني للدالة f و عرّن الوضع النسبي لهذه الاستقيمت بالنسبة إلى منحنى f .

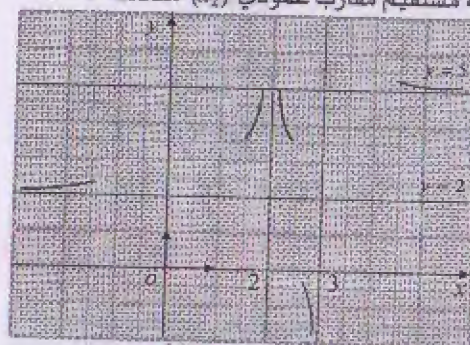
✓ الحل:

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ فإن المستقيم (d_1) ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (γ)

و بما انه من اجل كل x من المجال $]-\infty, 2[$ لدينا $f(x) > 2$

فان النحنى (γ) يقع فوق (d_1)

- بمان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ فان النحنى (γ) له مستقيم مقارب عمودي (d_2) معادلته $x = 2$.



إذا كان $x < 2$ فان (γ) يقع قبل (d_2)

و إذا كان $x > 2$ فان (γ) يقع بعد (d_2)

- بمان $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

فان المستقيم $x = 3$ (d_3) مقارب عمودي لـ (γ) .

إذا كان $x > 3$ فان (γ) يقع بعد (d_3)

و إذا كان $x < 3$ فان (γ) يقع قبل (d_3)

- بمان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ فان المستقيم (d_4) ذا المعادلة $y = 5$ مقارب أفقي لـ (γ)

و بما انه من اجل كل $x \in]3, +\infty[$ لدينا $f(x) > 5$ فان النحنى (γ) يقع فوق (d_4) .

3 - عمليات على النهايات

لما تكون للدالتين f و g نهايات معروفة نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال :

$f+g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ و نبين مختلف هذه النهايات في الجداول التالية :

النهايات مأخوذة عند $(+\infty)$ او عند $(-\infty)$ او عند عدد حقيقي a .

ℓ و ℓ' عدنان حقيقيان

• نهاية مجموع دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فان نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

• نهاية جداء دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ او $-\infty$
فان نهاية $f \times g$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين

حالة نهاية الدالة g غير معدومة

إذا كانت نهاية f	ℓ'	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ او $+\infty$
إذا كانت نهاية g	$\ell' \neq 0$	$-\infty$ او $+\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$-\infty$ او $+\infty$
فان نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell'}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

حالة نهاية الدالة g معدومة :

إذا كانت نهاية f	$+\infty$ او $\ell > 0$	$+\infty$ او $\ell > 0$	$-\infty$ او $\ell < 0$	$-\infty$ او $\ell < 0$	0
إذا كانت نهاية g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فان نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

حالات عدم التعيين هي $+\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

• نعلم أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة.

• نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة في البسط و كذلك في المقام.

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

تمرين تدريبي - 1

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$ بالعبارة \mathbb{R} دالة معرفة على

احسب النهايتين التاليتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

✓ الحل

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

لأن لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ (حالة عدم التعيين)

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $(+\infty)$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة و عليه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty , \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$$

كل حد من المجموع له نهاية $(-\infty)$ و بالتالي نستطيع تطبيق القواعد العملية المتعلقة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ فأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

تمرين تدريبي 2

$$f(x) = x^3 \left(4 - \frac{1}{x}\right) \text{ بالعبارة }]0, +\infty[$$

ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند الصفر.

✓ الحل :

$$f = U \times V \text{ عند } U(x) = x^3 \text{ و } V(x) = 4 - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 4 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} V(x) = -\infty$$

إذن في هذه الحالة لدينا عدم التعيين و بالتالي لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ و منه } f(x) = 4x^3 - x^2$$

تمرين تدريبي 3

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) لتكن f الدالة المعرفة بالعبارة

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1+\sqrt{x}}$$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

✓ الحل :

$$(1) f \text{ دالة معرفة إذا وفقط إذا كان } x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$\text{المعادلة } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ لها حلان هما 1 و 2}$$

$$\text{وبالتالي مجموعة تعريف الدالة } f \text{ هي } \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$(ب) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 7) = -4$$

إذن يجب معرفة إشارة المقام .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + x - 7) = 3$$

إذن يجب معرفة إشارة المقام على يسار 2 المقام سالب و على يمينه المقام موجب و منه ،

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

(2) من أجل قيم كبرى لـ x فإن سلوك $x+2$ و $x+1+\sqrt{x}$ من سلوك x لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

و بالتالي نستطيع أن نخمن في أول وهلة أن g عند $+\infty$.

و للبرهان على ذلك نضع العنصر المهيمن x كعامل مشترك في البسط و المقام :

$$g(x) = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x})} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

4 - نظريات المقارنة

1 - 4 نظرية الحصر

مبرهنة 1

إذا كان من أجل كل x من المجال $]a, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ و } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ حيث ℓ عدد حقيقي .

الإثبات

ليكن J مجالاً مفتوحاً كيفياً مركزه ℓ

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } A$$

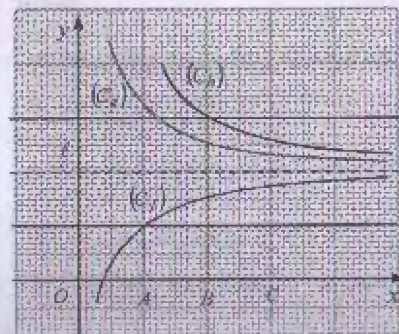
بحيث من أجل كل $x > A$ يكون $f(x) \in J$.

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } B$$

بحيث من أجل كل $x > B$ يكون $h(x) \in J$.

إذا اخترنا C عدداً حقيقياً بحيث $C > B$ و $C > A$

وكان $x > C$ فإن $f(x) \in J$ و $h(x) \in J$



لكن $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

إذن $g(x) \in I$ مما يبرهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة (1) تبقى صحيحة إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

نتيجة

إذا كان $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$

مبرهنة 2

f و g دالتان معرفتان على $I =]\alpha, +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $|f(x) - \ell| \leq g(x)$

وإذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

الإثبات:

للتباينة $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ تعني $\ell - g(x) \leq f(x) \leq \ell + g(x)$.

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ وحسب القواعد العملية في حساب النهايات فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ell + g(x)] = \ell \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ell - g(x)] = \ell$$

وحسب المبرهنة (1) فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $0 \geq \sin x \geq -1$

$$\text{و عليه } \frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{-1}{x}$$

$$\text{و لكون } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{فإن حسب نظرية الحصر } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $1 \geq \cos x \geq -1$

$$\text{و عليه } \frac{-2}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 0 \quad \text{و لكون } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\text{فإن حسب نظرية الحصر } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

2-4 المقارنة في اللانهاية

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I =]\alpha, +\infty[$

(1) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \geq g(x)$ وإذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \leq g(x)$ وإذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

الحل:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه $-1 + x \leq x + \sin x \leq 1 + x$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) = +\infty \quad \text{و} \quad f(x) \geq 1+x \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{- بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1+x) = -\infty \quad \text{و} \quad f(x) \leq -1+x \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5- نهاية الدالة المركبة

مبرهنة

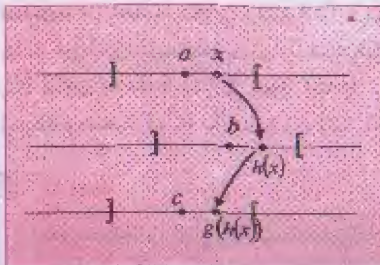
f, g, h ثلاث دوال بحيث $f(x) = g(h(x))$

كل من الحروف a, b, c تمثل إما عددا حقيقيا

أو $+\infty$ أو $-\infty$.

$$\text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

$$\text{وإذا كانت } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$



مثال -

(1) g و h دالتان معرفتان كما يلي $h(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x))$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x}{x-3}}$

الحل ✓

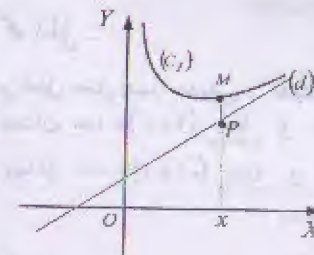
(1) على المجال $[-1, +\infty[$ لدينا $g(h(x)) = \sqrt{2x+4}$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x)) = +\infty$

(2) نضع $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = x - 3 = \frac{3x}{x-3}$

ومنه $\sqrt{\frac{3x}{x-3}} = g(h(x))$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x}{x-3}} = \sqrt{3}$

6 - المستقيم المقارب المائل



(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى .
القول أن للمستقيم (d) ذا المعادلة $y = ax + b$ مع $a \neq 0$
مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$
يعني أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

التفسير الهندسي

من أجل قيمة x من مجال تعريف الدالة f نعتبر
النقطة M من (C_f) والنقطة P من (d)
فاصلتهما x عندئذ يكون $PM = |f(x) - (ax + b)|$
و عليه من أجل قيم كبرى لـ x المسافة PM تقترب من الصفر وهذا مما يفسر أن المنحنى
(C_f) يكون بمحاذاة (d) في جوار $(+\infty)$.
ولعرفة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) نعين إشارة $[f(x) - (ax + b)]$

ملاحظة

نعرف بنفس الطريقة المستقيم المقارب المائل بجوار $(-\infty)$

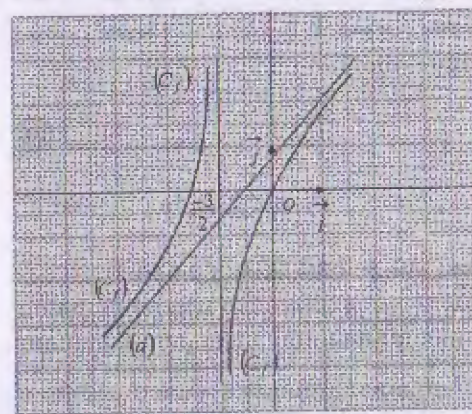
مثال -

- بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ للمنحنى

(C_f) الممثل للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1}$

- ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d)

الحل ✓



$$f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1} - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x - 2x^2 - 3x - 1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ فإن المستقيم (d) هو

مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $(+\infty)$

- إذا كان $x < -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} > 0$

و بالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق (d)

و إذا كان $x > -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} < 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

مبرهنة

f دالة بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ مع a و b عددين حقيقيين و $a \neq 0$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $-\infty$

مثال -

f دالة معرفة على المجال $[1, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ و آخر في جوار $(-\infty)$.

الحل ✓

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$$

إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ معادلته $(d_1): y = x$
- بنفس الطريقة نبين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (d_2) معادلته $y = -x$ في جوار $(-\infty)$

7 - الاستمرار

f دالة و I مجال محتوي في D_f

7-1 الاستمرار عند عدد و على مجال

- القول أن f مستمرة عند العدد a من I يعني أن f لها نهاية عند a وهذه النهاية بالضرورة $f(a)$ ونكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$
- القول أن f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل قيمة من I .

نتيجة

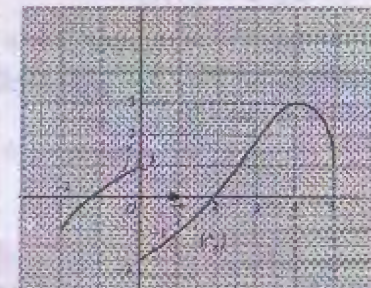
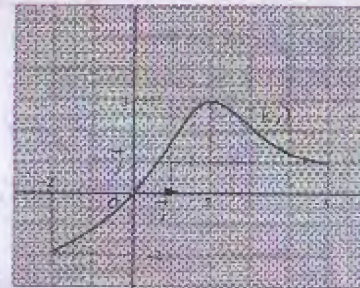
نستنتج من تعريف الاستمرار والقواعد العملية لحساب النهايات أن مجموع، و جداء و مركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

ملاحظة

دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى.

مثال - 1

f و g دالتان معرفتان على المجال $I = [-2, 5]$ ، (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين كما هو موضح في الشكلين.



النهايات والاستمرار

- الدالة f مستمرة على المجال I لأن (C_f) عبارة عن خط منحن غير متقطع رسمناه بدون رفع القلم.

- الدالة g غير مستمرة على المجال I لأن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2$ إذن g ليست لها نهاية عند $x = 0$

مثال - 2

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{|x|-1}{2}$. ادرس استمرار f عند $x = 0$

✓ الحل

$$\begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases} \text{ بمان}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{2}, & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{-x-1}{2}, & x \leq 0 \end{cases} \text{ فان}$$

$$f(0) = \frac{|0|-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f لها نهاية $-\frac{1}{2}$ عند $x = 0$ وبالتالي فهي مستمرة عند $x = 0$

7-2 قابلية الاشتقاق والاستمرار

مبرهنة

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a من I فإن f مستمرة عند a .
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f مستمرة على I .

الإثبات

f دالة قابلة للاشتقاق عند a يعني أن الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ لها نهاية } f'(a)$$

من أجل كل $x \neq a$ لدينا $x - a \neq 0$ و $f(x) - f(a) = (x - a)g(x)$

ومن هنا ينتج $f(x) = f(a) + (x - a)g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a)g(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ وهذا يعني أن f دالة مستمرة عند a .

ملاحظة :

إذا كانت دالة مستمرة عند عدد a فلا نستطيع القول أنها قابلة للاشتقاق عند a

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = |x| + 1$.
الدالة f مستمرة عند الصفر لكن غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + 1 - 1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ و}$$

استمرار الدوال الرجعية

- دالة الجذر التربيعي قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ إذن فهي مستمرة على نفس المجال .
وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ فإن هذه الدالة مستمرة عند الصفر .
ومنه دالة الجذر التربيعي مستمرة على المجال $[0, +\infty[$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و بالتالي فهي مستمرة على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها .
- الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} إذن فهما مستمرتان على \mathbb{R}

ملاحظة :

كل الدوال المشككة من دوال مرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها .

مثال -

f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
مجموعة تعريف f هي \mathbb{R} بوضع $g(x) = x^2 + 1$ و $h(x) = \sqrt{x}$ يكون $f(x) = \text{hog}(x)$.
إذن الدالة f هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي فالدالة f مستمرة على \mathbb{R}

8 - دراسة دالة الجزء الصحيح

من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث $n < x \leq n+1$.
نسمي دالة الجزء الصحيح بالدالة التي نرمز لها بـ E و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال

$[n, n+1[$ العدد الصحيح n و نكتب $E(x) = n$

نختار بعض القيم لـ x

$$E(0) = E(0,25) = E(0,75) = 0$$

$$E(1) = E(1,002) = E(1,999) = 1$$

$$E(-0,3) = E(-0,5) = -1$$

$$E(x) = 0 : 1 > x \geq 0$$

$$E(x) = 1 : 2 > x \geq 1$$

$$E(x) = 2 : 3 > x \geq 2$$

على المجال $[-2, 3]$ يتكون التمثيل

البياني للدالة E من خمس قطع

مستقيمة ونقطة معزولة .

الدالة E معرفة عند 2 و على مجال مركزه 2

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) = 2$ فإن الدالة E ليست لها نهاية عند 2

و بالتالي فهي ليست مستمرة عند هذه القيمة وعليه فإنها مستمرة على $[1, 2[$

9 - الدوال المستمرة وحلول المعادلات

في حالة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية نستطيع حل المعادلة $f(x) = k$

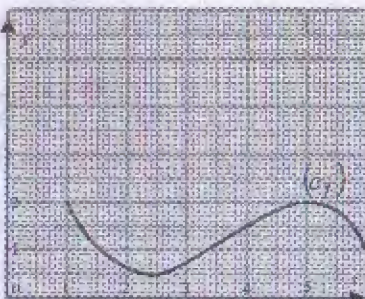
أما في حالة دالة كسفية لا نستطيع تعيين الحل الجبري لذلك نلجأ إلى التحليل الذي يسمح لنا بإيجاد القيم التقريبية للحلول إن وجدت و بالدقة التي نريدها .
و قبل إجراء أي حساب لابد من معرفة هل توجد حلول أم لا .

مثال -

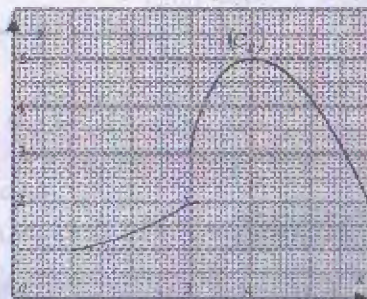
المنحنيان المثلان في الشكلين الجاورين هما لدالتين f و g العرفتين على $[1, 6]$

الحل البياني للمعادلة $f(x) = k$ هو البحث عن فواصل عن فواصل تقاطع إن وجدت بين

(C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y = k$



الدالة f مستمرة على $[1, 6]$



الدالة g غير مستمرة على $[1, 6]$

الإثبات

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على I و k عددا حقيقيا من المجال $[f(a), f(b)]$

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

لأن كل صورة $f(x)$ تنتمي إلى $[f(a), f(b)]$

وهذا معناه $f(I) \subset [f(a), f(b)]$ (1)

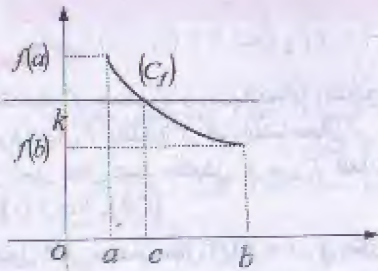
وبالعكس إذا كان $y \in [f(a), f(b)]$ فإن:

أ) هي صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I إذا $y \in f(I)$

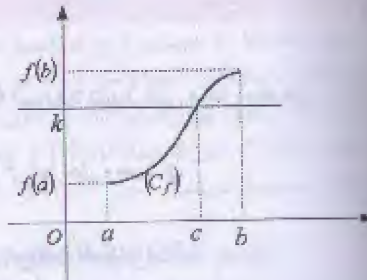
وهذا معناه $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن $f(I) = [f(a), f(b)]$

(2) حسب نظرية القيم المتوسطة نستطيع إيجاد عدد c من $I = [a, b]$ بحيث $f(c) = k$.
لأن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا في المجال I وهذا الحل يكون وحيدا لأنه إذا كان لدينا عددا حقيقيا c و c' من I و $c < c'$ بحيث $f(c) = f(c') = k$ فإن f ليست متزايدة وهذا تناقض حيث f متزايدة تماما على I .
نتيجة المبرهنة تبقى صحيحة إذا كانت f متناقصة تماما على $[a, b]$



f دالة متناقصة تماما على $[a, b]$
مجموعة الوصول هي $[f(b), f(a)]$



f دالة متزايدة تماما على $[a, b]$
مجموعة الوصول هي $[f(a), f(b)]$

ملاحظة

إذا كانت $f(a) = k$ فإن $c = a$ وإذا كان $f(b) = k$ فإن $c = b$

نتيجة

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على $I = [a, b]$ وإذا كانت $f(a)f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في I .

بالنسبة إلى الدالة f من أجل $2 \leq k \geq 1$ المعادلة $f(x) = k$ لها حلول

بالنسبة إلى الدالة g من أجل كل $5 \geq k \geq 1$ لا توجد حلول للمعادلة $g(x) = k$ لأنه إذا كان $2 < k < 3$ فإن المستقيم $y = k$ لا يقطع المنحنى (C_g) .

9 - 1 نظرية القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $[a, b]$.

من أجل كل عدد حقيقي y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصورة بين a و b بحيث $f(c) = y$.

نعر عن نتيجة المبرهنة بكيفيتين

مختلفتين بفرض أن $f(a) \leq f(b)$ و بوضع

$I = [a, b]$ نستطيع القول بطرق متكافئة

• من أجل كل y من المجال $[f(a), f(b)]$

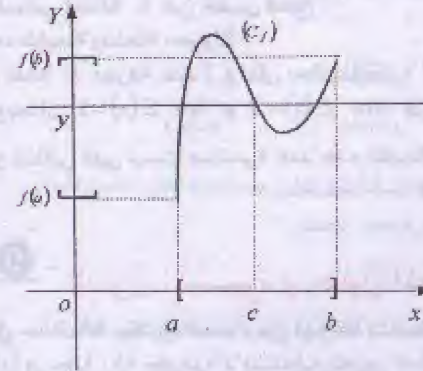
المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول x تقبل

على الأقل حلا c من المجال I .

• كل عدد حقيقي y من $[f(a), f(b)]$

هو صورة بالدالة f على الأقل لعدد

حقيقي c من I



صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة مستمرة على I .

صورة $I = [a, b]$ بالدالة f ونرمز لها ب $f(I)$ هي مجموعة كل الأعنادر $f(x)$ لما x يسمح I

ملاحظة

المجال $[f(a), f(b)]$ محتوي في $f(I)$

9 - 2 الدالة المستمرة و الرتيبة تماما على $[a, b]$

مبرهنة 1

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $I = [a, b]$ فإن:

(1) صورة I بالدالة f هي المجال $[f(a), f(b)]$ في حالة f متزايدة تماما

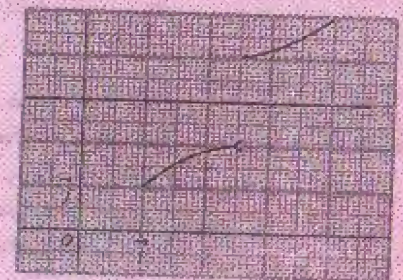
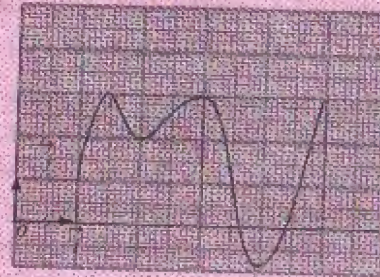
و $[f(b), f(a)]$ في حالة f متناقصة تماما

(2) من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x) = k$ حلا وحيدا في $[a, b]$.

نقول عندئذ أن f تقابل من $[a, b]$ في $[f(a), f(b)]$ أو في $[f(b), f(a)]$

ملاحظة

- (1) إذا كانت الدالة f ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونا كما يبينه الشكل (1) فمثلا المعادلة $f(x) = 3$ ليس لها حل.
- (2) وحداية الحل مضمونة بالترتبة التامة (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) فإذا كانت الترتبة غير تامة نستطيع أن نتحصل على عدة حلول كما يبينه الشكل (2) فمثلا المعادلة $f(x) = 3$ لها عدة حلول على المجال $[1, 5]$.



مبرهنة 2

إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما، نتائج المبرهنة 1 السابقة تمتد على مجال كفي I . صورة المجال I بالدالة f هي أيضا مجال J .

ومن أجل كل عدد حقيقي y من J للمعادلة $f(x) = y$ لها حل وحيد في

$$[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)] \cdot I$$

الجدول الآتي يحدد مجال $J = f(I)$ في كل حالة من الحالات الممكنة لـ I .

نقبل أن f لها نهاية حقيقية أو غير منتهية على أطراف I

وسنريك في الجدول التالي المجال J حيث a و b تمثل اعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

صورة I بالدالة f هو المجال		
$I =$	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$]f(a), f(b)[$	$]f(b), f(a)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)[$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالمعادلة $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$
برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in [3, 4]$ ثم اعط حصرا له بتقريب 10^{-1}

✓ الحل

الجدول التالي يلخص لنا دراسة الدالة f

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	1	5	1	-15	$-\infty$

بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[3, 4]$ وأيضا $f(3)f(4) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α من المجال $[3, 4]$.

الجدول السابق يبين أيضا أنه من أجل كل $x < 3$ لدينا $f(x) > 0$ ومن أجل كل $x > 4$ لدينا $f(x) < 0$ إذن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} إلا الحل α .

بالآلة الحاسبة البيانية نجد $f(3,1) = 0,39$ و $f(3,2) = -1,04$ إذن $3,1 < \alpha < 3,2$

3.4 القيم التقريبية لحل معادلة

نظرية القيم المتوسطة تسمح لنا بواسطة الحصر المتوالي بتحديد القيم القريبة من حل المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ على المجال المغلق } I = [a, b]$$

نفرض أن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ وليكن $x \in [a, b]$

طريقة المسح

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[a, b]$ و نقوم بحساب قيم f ابتداء من $f(a)$ بخطوة مقدارها p على النحو التالي،

$f(a+p), f(a+2p), \dots$ حتى نتحصل على القيمة الموجبة $f(a+kp)$ مع $k \in \mathbb{N}$.

من القيمة a التي تسبق $a+kp$ نبدل الخطوة p بالخطوة p' حيث $p' = \frac{p}{10}$ ونتابع

الحسابات بالكيفية السابقة $f(a+p'), \dots$

نكمل هذه العملية حتى نتحصل على التقريب المطلوب للحل.

مثال -

من أجل المعادلة $x^3 - 6x^2 + 7 = 0$. أوجد حصرًا بتقريب 0,001 للحل β ، حيث β محصورة بين 0 و 4 .

الحل ✓

نشكل أولاً جدولاً من عمودين الأول لـ x والثاني لـ $f(x)$ حيث $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$.
ابتداءً من الصفر بخطوة $p = 1$ نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذه الحالة تكون $x = 1$.
ونشكل جدولاً ثانياً بخطوة مقدار 0,1 . ابتداءً من القيمة 1 ونراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذه الحالة $x = 1,2$.
ونشكل جدولاً ثالثاً بخطوة مقدار 0,01 ابتداءً من القيمة 1,2 ونراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ والتي هي $x = 1,20$.
ونشكل جدولاً رابعاً بخطوة مقدارها 0,001 ابتداءً من 1,20 ونراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذا الجدول $x = 1,208$.
الحصر بتقريب 0,001 للحل β هو $1,208 < \beta < 1,209$.

x	$f(x)$
1	2
1,1	1,071
1,2	0,088
1,3	-0,943

$$p = 0,1 \\ 1,3 < \beta < 1,2$$

x	$f(x)$
0	7
1	2
2	-9

$$p = 1 \\ 1 < \beta < 2$$

x	$f(x)$
1,200	0,0880
1,201	0,0779
1,204	0,0480
1,206	0,0276
1,207	0,0176
1,208	0,072
1,209	-0,01

$$p = 0,001$$

x	$f(x)$
1,2	0,088
1,21	-0,0131

$$p = 0,01 \\ 1,21 < \beta < 1,20$$

طريقة ديكتومي (القسمة على اثنين)

نقسم المجال $[a, b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ، ونحسب $f(m)$ حيث m منتصف المجال $[a, b]$.
إشارة $f(m)$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[a, m]$ أو إلى $[m, b]$.

- إذا كان $f(m) < 0$ فإن α ينتمي إلى $[m, b]$ وفي هذه الحالة نعيد قسمة المجال $[m, b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ونحسب $f(m')$ حيث $m' = \frac{m+b}{2}$.
- إشارة $f(m')$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[m', b]$ أو إلى $[m, m']$ وهكذا نعيد عملية قسمة المجالات حتى نحصل على التقريب المطلوب .



ملاحظة

إذا كان $f(m) > 0$ فإن α ينتمي إلى المجال $[a, m]$ نعيد نفس العملية السابقة للحصول على التقريب المطلوب .

مثال -

من أجل المعادلة $x^3 - 6x^2 + 7 = 0$. أوجد حصرًا بتقريب 0,1 للحل β حيث $4 > \beta > 0$.

الحل ✓

نضع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ ، $f(0) = 7$ ، $f(4) = -25$ ، $I = [a, b] = [0, 4]$.
بقسمة المجال $[0, 4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول نحصل على $[0, 2]$ و $[2, 4]$.
لدينا $m = \frac{0+4}{2} = 2$ و $f(m) = f(2) = -9$.
بما أن $f(m) < 0$ فإن الحل β ينتمي إلى المجال $[2, 4]$.
نقسم المجال $[2, 4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول فنحصل على $[2, 3]$ و $[3, 4]$.
لدينا $m' = 3$ و $f(m') = 2$.
بما أن $f(m') > 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[2, 3]$.
نقسم المجال $[2, 3]$ إلى مجالين $[2, \frac{5}{2}]$ و $[\frac{5}{2}, 3]$.
لدينا $m'' = \frac{5}{2}$ و $f(m'') = -3,125$.
بما أن $f(m'') < 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[2, \frac{5}{2}]$ و منه $1,5 > \beta > 2$.

من أجل $x \neq -3$ يكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{x(x+3)}{x+3}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -3 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x-2} = 0 \quad (5)$$

الحسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-4)^2} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

حساب النهايات لدوال ناطقة

تطبيق 2

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+5} \text{ عند } 5, 1, +\infty, -\infty \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^4-16}{x^3-8} \text{ عند } 2 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)} \text{ عند } 2 \text{ و } +\infty \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|x^2-x|}{x^2+x-2} \text{ عند } 1, -\infty, +\infty \quad (4)$$

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2-6x+5) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-6x+5) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 5} (x+2) = 7, \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

إذن لتعيين نهاية f عند 5 أو عند 1 لا بد من معرفة إشارة المقام.

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 5$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

و من أجل كل عدد حقيقي $x < 1$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ ومنه}$$

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 5$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

و من أجل كل عدد حقيقي $x < 1$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

حساب النهايات

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 4x^3 - 2x - 1 \text{ عند } -\infty \text{ و عند } +\infty \quad (1)$$

$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 7 \text{ عند } -\infty \text{ و عند } +\infty \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty \text{ و عند } 2 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+3} \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty \text{ و عند } -3 \quad (4)$$

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x-2} \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty \text{ و عند } 2 \quad (5)$$

$$f(x) = x^2 + 3 - \frac{2}{(x-4)^2} \text{ عند } +\infty \text{ و عند } -\infty \text{ و عند } 4 \quad (6)$$

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x^4) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \text{ إذن لتعيين } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ نعين إشارة } (x-2)$$

إذا كان $x > 2$ فإن $x-2 > 0$ وإذا كان $x < 2$ فإن $x-2 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -3} (x^2+3x) = 0$$

فإن نهاية f في جوار 3 هي من الشكل $\frac{0}{0}$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 16) = 0$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq 1$ نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

إذن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{15}{7}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$

إذن نهاية f من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2} \times \sqrt{x-2}}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x-2} = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow 2} x\sqrt{x-2} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = +\infty$

(4) $\begin{cases} x^2 - x = -x^2 + x, x \in [0, 1] \\ x^2 - x = x^2 - x, x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$

ومنه النهاية $f(x)$ نكتب:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+x}{x^2+x-2}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x^2-x}{x^2+x-2}, & x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{x+2} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$

3 تطبيق

حساب النهايات لدوال جذرية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند $x=1$ (ب) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$ عند $+\infty$

(ج) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$ (د) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند $x=1$

الحل

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x}}{x}} = 1$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-5)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}} = -\frac{10}{3}$$

تطبيق 4

حساب النهايات لدوال مثلثية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:
(أ) $f(x) = \frac{\sin 6x}{x}$ عند 0 ، (ب) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ عند 0 وعند $+\infty$ ،
(ج) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ عند 0 ، (د) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ عند 0

✓ الحل

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{6x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 6 \times 1 = 6$$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} \sin 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 0 \times 1 = 0$$

- من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $1 \geq \sin(2x) \geq -1$

$$\text{ومنه } \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} \geq \frac{-1}{\sqrt{x}} \text{ وبما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$$

فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ و $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos \frac{x}{2} \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = 2$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos \frac{x}{2} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

تطبيق 5

حساب النهايات

عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{5x-2}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد المجال I بحيث إذا كان x ينتمي إلى I فإن $f(x) > 10^2$

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (5x-2) = 3$$

$$f(x) > 10^2 \text{ يكافئ } \frac{5x-2}{(x-1)^2} > 10^2 \text{ يكافئ } 10^2 x^2 - 205x + 102 < 0$$

$$\Delta = (205)^2 - 4 \times 100(102) = 1225$$

$$x_2 = \frac{205-35}{100} = \frac{170}{100} = 1,7 \text{ ، } x_1 = \frac{205+35}{100} = \frac{240}{100} = 2,4$$

x	$-\infty$	1,7	2,4	$+\infty$
$10^2 x^2 - 205x + 102$	+	○	○	+

على يكون $10^2 x^2 - 205x + 102 < 0$

يجب أن يكون $x \in]1,7 ; 2,4[$

أي $1,7 < x < 2,4$

لأن المجال $I =]1,7 ; 2,4[$

تطبيق 6

حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث أنه من أجل كل x لدينا (I) $1 \leq f(x) \leq 2$

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \frac{3f(x)+5}{x^3}$ بالعبارة

اعط حصرًا لـ $g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

✓ الحل

بموجب المتباينة (I) بالعدد 3 نجد $3 \leq 3f(x) \leq 6$ وبإضافة 5 إلى حدود هذه الأخيرة نجد

$$(II) \dots 8 \leq 3f(x)+5 \leq 11$$

بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد الموجب تمامًا x^3 نجد $\frac{8}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{11}{x^3}$

وبقسمة حدود المتباينة (II) على العدد السالب تمامًا x^3 نجد $\frac{11}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{8}{x^3}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11}{x^3} = 0$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11}{x^3} = 0$.

تطبيق 7

حساب النهايات باستعمال الحصر

$f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{x}$ بالعبارة $[0, +\infty)$

(1) تحقق من أن $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$

(2) استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ ثم احسب نهاية f عند $+\infty$

الحل

(1) $f(x) = \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{x})} = \frac{(2+x) - (x)}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}}$

(2) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x}$ أي $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x}$

ومنه $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$... (1)

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x+2}$

ومنه $f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ أي $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x+2}}$... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

تطبيق 8

حساب النهايات باستعمال الحصر

$f(x) = \frac{2x + \sin x}{3 - \cos x}$ بالعبارة

(1) بين أن $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \cos x} \leq \frac{1}{2}$

(2) استنتج حصر $f(x)$ من أجل كل x ثم عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل

(1) نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$ بإضافة 3 إلى حدود المتباينة الأخيرة نجد $2 \leq 3 - \cos x \leq 4$ وبالقلب نجد:

(1) $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3 - \cos x} \geq \frac{1}{4}$

بإضافة $2x$ إلى حدود المتباينة $-1 \leq \sin x \leq 1$ نجد:

(2) $1 + 2x \geq 2x + \sin x \geq -1 + 2x$

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد:

$\frac{1}{2}(1 + 2x) \geq \frac{2x + \sin x}{3 - \cos x} \geq \frac{1}{4}(-1 + 2x)$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}(-1 + 2x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تطبيق 9

دراسة وضعية المنحني بالنسبة إلى مستقيم مقارب

ادرس النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ ثم حدد وضعية المستقيم للقارب الأفقي بالنسبة إلى المنحني الدالة f .

الحل

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x+2} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x+2} = +\infty$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ فإن المستقيم $y = 3$ ذا المعادلة $y = 3$ مقارب أفقي لـ (C_f)

ولدراسة وضعية (d) بالنسبة إلى (C_f) ندرس إشارة $f(x) - y$ على D_f

$f(x) - y = f(x) - 3 = \frac{3x}{x+2} - 3 = \frac{3x - 3x - 6}{x+2} = \frac{-6}{x+2}$

إذا كان $x > -2$ فإن $\frac{-6}{x+2} < 0$

ومن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (d)

إذا كان $x < -2$ فإن $\frac{-6}{x+2} > 0$

ومن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (d)

تطبيق 10

حساب النهايات باستعمال الدالة المركبة

- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :
- (1) عند $x=5$ $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$
 - (2) عند $x=2$ $f(x) = \cos \pi x + \frac{1}{(x-2)^2}$
 - (3) عند $x=+\infty$ $f(x) = (x - \sqrt{x} + \frac{1}{x-1})^3$
 - (4) عند $x=-\infty$ $f(x) = \sin(\frac{\pi x+2}{2x+3})$

الحل

(1) نضع $X = \frac{x+2}{x-4}$ ومنه $f(x) = \sqrt{X}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \sqrt{7} \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 5} X = \frac{7}{1} = 7$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} \cos \pi x = 1$$

وحسب قواعد العملية لجمع النهايات نجد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 + \infty = +\infty$

(3) نضع $X = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ منه $f(x) = X^3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{(x-1)x}) = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$\text{ومنّه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} X^3 = +\infty$$

(4) بوضع $X = \frac{\pi x+2}{2x+3}$ فيكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{ومنّه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

تطبيق 11

تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ و (C_f) منحناها البياني عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث النحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقارباً عمودياً و يقبل عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y=3x-4$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$

الحل

النحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقارباً له هذا معناه أن $4-d=0$ أي $d=4$

بما أن $y=3x-4$ معادلة للمستقيم القارب المائل لـ (C_f) فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ فإن $a=3$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-3x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-3x) = -4$ فإن $b=-4$

$A(2,3)$ تنتمي إلى (C_f) هذا معناه $f(2)=3$

$f(2)=3$ يكافئ $2a+b+\frac{c}{2-d}=3$ يكافئ $c=-2$

$$\text{لأن } f(x) = 3x - 4 - \frac{2}{x-4}$$

تطبيق 12

تعيين معادلة المستقيم القارب المائل للنحني

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) أثبت أن (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارباً مائلاً لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

(ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (d)

(2) هل المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

الحل

(d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = 0$$

لأن (d) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) ندرس إشارة القدار $f(x) - (x+1)$ على \mathbb{R}

$$\text{لدينا } f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

نلاحظ أنه إذا كان $x \leq 0$ فإن $-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} < 0$ وفي هذه الحالة النحني (C_f) يقع تحت (d)

الحل ✓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1} - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + \sqrt{9x^2 - 1})$$

$$-3x + \sqrt{9x^2 - 1} = \frac{(-3x + \sqrt{9x^2 - 1}) \times (-3x - \sqrt{9x^2 - 1})}{(-3x - \sqrt{9x^2 - 1})}$$

$$= \frac{9x^2 - 9x^2 - 1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}} = \frac{-1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{-1 + 9x^2} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{-1 + 9x^2})$$

$$3x + \sqrt{-1 + 9x^2} = \frac{(3x + \sqrt{-1 + 9x^2})(3x - \sqrt{-1 + 9x^2})}{3x - \sqrt{-1 + 9x^2}} = \frac{+1}{3x - \sqrt{-1 + 9x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{+1}{3x - \sqrt{-1 + 9x^2}} = 0$$

(ج) من (ب) و (ج) نستنتج أن (C_f) له مستقيمين مقاربين مائلين هما:

$$(d_1): y = -2x \text{ في جوار } (-\infty) \text{ و } (d_2): y = 4x \text{ في جوار } (+\infty)$$

تعيين حلول معادلة

تطبيق 15

$$f \text{ دالة معرفة على } I = [0, 3] \text{ بالعبارة } f(x) = \frac{1}{x+2}$$

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عيّن $f(I)$

(2) ما هو عدد حلول للمعادلة $f(x) = \frac{1}{4}$ على I ؟

$$f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{-9}{(x + \sqrt{x^2+9})\sqrt{x^2+9}}$$

بما أن $x > 0$ فإن $x + \sqrt{x^2+9} > 0$ و $\sqrt{x^2+9} > 0$ فإن $f(x) - (x+1) < 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

(2) نلاحظ أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = -f(x)$

أي أن f فردية وبالتالي نظير المستقيم (d) بالنسبة إلى مبدأ العلم هو $d': y = x-1$

إذن $y = x-1$ هي فعلاً معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$

تعيين المنحنى المقارب للمنحنى

تطبيق 16

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} \text{ دالة معرفة على }]-1, +\infty[\text{ بالعبارة}$$

و (C_f) منحنىها البياني أوجد معادلة منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد

وضعيته بالنسبة إلى (C_f)

الحل ✓

لا x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تسلك سلوك $\frac{x^4}{x^2}$ أي x^2 ولا تسلك سلوك $ax+b$

إذن لا يمكن إيجاد مستقيم مقارب من الشكل $y = ax+b$ لـ (C_f) وعليه ندرس $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 - 2)] = 0$$

ومنه نستنتج أن المنحنى ذا المعادلة $y = x^2 - 2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 + 1} = 0 \text{ و } f(x) - (x^2 - 2) = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى

تطبيق 17

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = x + \sqrt{9x^2 - 1} \text{ وتمثيلها البياني } (C_f)$$

(1) حدد نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$(2) \text{ ا حسب (1) ا حسب (2) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 4x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x)$$

(ج) استنتج أن (C_f) له مستقيمان مقاربين بطلب تعيين معادلتيهما ؟

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, 3]$ ومن أجل كل x من I لدينا $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$ ومنه:

x	0	3
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	0,5	$\frac{1}{5}$

من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على I

$$f(3) = \frac{1}{5} \text{ و } f(0) = \frac{1}{2}$$

من جدول تغيرات f نستنتج أن

$$f(I) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right]$$

(2) بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على I و $\frac{1}{4}$ ينتمي إلى $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right]$ فإن حسب

نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α للمعادلة $f(x) = \frac{1}{4}$

تطبيق 16

تحديد حلول معادلة

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة التالية $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

(1) احسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(-1)$

(2) استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية على المجال $[-1, 1]$

✓ الحل

$$(1) f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{3}{2}$$

(2) الدالة f مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة على $[-1, 1]$ لأنها دالة كثيرة حدود

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-1, 1]$ ولدينا $f'(x) = 12x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

$f'(x)$ ينعدم عند $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ مغيرا إشارته بجوارهما وبالتالي f ليست رتيبة على المجال $[-1, 1]$

$$f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $[-1, -\frac{1}{2}]$ للمعادلة $f(x) = 0$

$f(-\frac{1}{2})f(0) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد β على المجال $[-\frac{1}{2}, 0]$

للمعادلة $f(x) = 0$

$f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد γ للمعادلة $f(x) = 0$

على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ وبالتالي نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في $[-1, 1]$

تطبيق 17

دراسة استمرار دالة

$$f \text{ دالة معرفة بـ } \begin{cases} f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) هل الدالة f مستمرة عند الصفر على \mathbb{R} ؟

✓ الحل

(1) من أجل كل x من \mathbb{R}^* لدينا $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ ومنه $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(2) بما أن الدالة f معرفة عند الصفر و f لها نهاية وحيدة عند الصفر

فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ وعليه فإن الدالة f مستمرة عند 0

الدالتان $x \rightarrow \frac{1}{x}$ و $x \rightarrow \cos x$ مستمرتان على \mathbb{R}^*

وبالتالي الدالة المركبة hog مستمرة على \mathbb{R}^* ($hog(x) = \cos \frac{1}{x}$)

الدالة $x \rightarrow x^2$ مستمرة على \mathbb{R}^*

إذن جداء الدالتين $x \rightarrow x^2$ و hog مستمرة على \mathbb{R}^* و عليه فإن f مستمرة على \mathbb{R}

تمارين و مسائل



1- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = 3x^4 + 5$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

(2) $f(x) = -x^4 - x^2 - x + 1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(3) $f(x) = \frac{-x+5}{2x+1}$ عند $+\infty, -\infty, -\frac{1}{2}$

(4) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ عند $+\infty, -\infty$

(5) $f(x) = -5x + 4 + \frac{1}{2x+1}$ عند $+\infty, -\infty, -\frac{1}{2}$

(6) $f(x) = \frac{3x^2}{(x-3)(1-x)}$ عند $+\infty, -\infty, 1, 3$

(7) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{(x-1)(4-x)}$ عند $+\infty, -\infty, 1, 4$

2- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{x+3}{2x^2+x-1}$ عند $+\infty, -\infty, -1, \frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^3-4}$ عند $+\infty, -\infty, -2, 2$

(3) $f(x) = \frac{x-3}{x\sqrt{x-3}}$ عند $+\infty, 3$

(4) $f(x) = \frac{|x|(x-1)}{x^2+|x|-2}$ عند $+\infty, -\infty, -1, 1$

3- أدرس نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ عند $+\infty, -\infty$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2+4} - 2x + 1$ عند $+\infty, -\infty$

(3) $f(x) = \frac{-x+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}$ عند $+\infty, 0$

4- f و g دالتان معرفتان على $[2, +\infty[\cup]-\infty, -2]$ بالعبارتين :

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} - x \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x^2-4} + x$$

برهن أن $f(x) \times g(x) = -4$ وما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ ؟ وما هي أيضا نهاية f عند $(-\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(-\infty)$ ؟

5- f دالة معرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$ بين الجمل الصحيحة من الخاصية برر ذلك :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ، (ب) الدالة f زوجية . (ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

(د) $f(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم . (هـ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

6- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ عند 0 ، (2) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ عند 0

(3) $f(x) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ عند 0 مع α و β حقيقيان غير معدومين

(4) $f(x) = \frac{\tan x + \sin x}{x^3}$ عند 0 ، (5) $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$ عند 0

7- احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{1-\sin x + \cos x}{1-\sin x - \cos x}$ عند $\frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = \frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ عند 0

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$ عند 0

(4) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x} - \tan 2x$ عند $\frac{\pi}{4}$

8- بين أن $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ ثم استنتج نهاية الدالة $\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند $x \rightarrow 0$

9- أوجد نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد عددا حقيقيا α

بحيث إذا كان $x \in]-\alpha, 1+\alpha[$ فإن $f(x) > 10^3$

- (10) - عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$
 ثم اوجد عددا حقيقيا A بحيث إذا كان $x \in]1,4, 1,6[$ فإن $f(x) \in A$
- (11) - f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \cos^2 x - x + 1$
 (1) لماذا لا يمكن تطبيق القواعد العملية في حساب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$ ؟
 (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $-x+1 \leq f(x) \leq -x+2$
 ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$
- (12) - بين أنه من أجل كل $x > 1$ لدينا $\frac{1}{x+1} < \cos x < \frac{-1}{x+1}$
 ثم استنتج نهاية الدالة $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$
- (13) - f دالة معرفة على $]2, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+\cos x}{x-2}$ بين أنه من أجل كل $x > 2$ لدينا $\frac{3x-1}{x-2} \geq f(x) \geq \frac{3x+1}{x-2}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$
- (14) - f دالة بحيث من أجل كل $x > 0$ ، $f(x) \geq \frac{1}{3}x^2 + 1$ ما هي نهاية f عند $(+\infty)$ ؟
- (15) - عين نهاية الدوال f, g, h عند $+\infty$ و $-\infty$ باستعمال نظرية الحصر
 $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$ ، $g(x) = x^2+3+\cos x$ ، $h(x) = -x+1+\sin x$
- (16) - f دالة بحيث من أجل كل $x \geq 0$: $|f(x)-4| \leq \frac{2}{x+1}$ ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟
- (17) - ادرس النهايات عند $+\infty, -\infty, \frac{1}{2}$ للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{-3x}{2x+1}$
 ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة وكذا الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.
- (18) - f دالة معرفة على \mathbb{R} و (C_f) منحناها البياني في معلم معطى و (d) مستقيم معادلته $y = x-3$ عين الجمل الصحيحة من بين الجمل الآتية :

(1) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$
 (ب) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 (ج) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = +\infty$
 (د) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$
 (هـ) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) فإن $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$$

- (19) - f دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ و منحناها البياني (C_f) .
 اوجد منحني مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f) .
- (20) - f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$
 (1) احسب نهاية f عند $+\infty, -\infty$
 (2) اكتب $4x^2 - 4x + 3$ على الشكل النموذجي
- (21) - ادرس النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$
 (ج) استنتج أن المنحنى الممثل للدالة f له مستقيمان مقاربان مانلان يطلب تعيينهما
 ثم بين أن (C_f) يقع فوق كل منهما.
- (22) - f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -x^3 + 3x + 1$
 (1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها
 (2) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في كل مجال من المجالات التالية : $[1, 2]$ ، $[-1, 1]$ ، $[-2, -1]$
- (23) - ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$
 لماذا للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة حلول مختلفة على \mathbb{R} ؟
- (24) - بين أن المعادلة $-x^3 - x + 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا على \mathbb{R}
 اعط حصرا لهذا الحل بتقريب 0,001
 (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a المعادلة $-x^3 - x + 4 = a$ لها حل وحيد في \mathbb{R}

24 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2\sin x - x$

إذا علمت أنها متزايدة تماما على المجال $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

استنتج عند حلول المعادلة $\sin x = \frac{x}{2}$ على المجال $[0, \pi]$ ثم على المجال $[-\pi, 0]$

ثم بين أن هذه الحلول وحيدة في \mathbb{R}

25 - f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$, $x \neq 0$
 $f(0) = \alpha$

(1) ما هي القيم التي يأخذها α حتى تكون الدالة f مستمرة على \mathbb{R} ؟

26 - f دالة مستمرة على المجال $[0, 1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من

I لدينا $f(x) \in I$

g الدالة المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - x$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة على الدالة g بين أنه يوجد عدد حقيقي a من I

بحيث $f(a) = a$

الدرس 3

الإشتقاقية ودراسة الدوال

1 - تعاريف (تذكير)

D_f مجموعة تعريف الدالة f و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1 - 1 العدد المشتق و الدالة المشتقة

تعريف 1

f دالة معرفة على مجال I و a عدد منه

عندما نقول أن ℓ هو العدد المشتق للدالة f عند a نعني أن أحد الشرطين التاليين محقق.

الشرط الأول :

الدالة $f \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ لها نهاية ℓ عند 0.

الشرط الثاني :

الدالة $f \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ لها نهاية ℓ عند a .

و نرمز إلى العدد المشتق لـ f عند a بـ $f'(a)$

إذا قبلت الدالة f عددا مشتقا عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a .

و إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد من مجال I محتوي في D_f

نقول أن f قابلة للاشتقاق على I .

تعريف 2

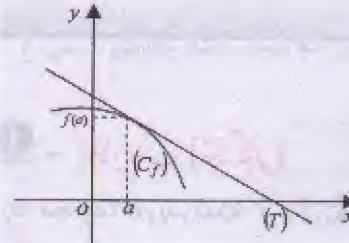
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . الدالة المشتقة للدالة f على المجال I هي الدالة التي نرمز لها بـ f' والتي ترفق بكل x من I بالعدد $f'(x)$.

ملاحظة

- (1) يمكن كتابة $f'(x) = \frac{d}{dx} f$ وتسمى الكثافة التفاضلية لـ f' .
- (2) تعريف f' ليس مقتضرا على مجال واحد بل يمكن تعريفها على اتحاد مجالات.

مثال -

الدالة المشتقة للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ المعرفة على $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ هي الدالة $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ حيث



1-2 المماس لمنحني عند نقطة

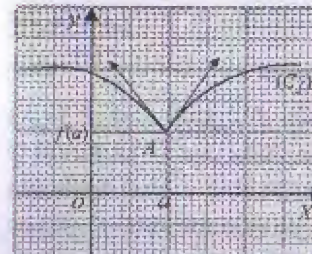
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل a . المماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(a, f(a))$ هو المستقيم (T) المار بـ A ومعامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته هي: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

1-3 المشتق من اليمين ومن اليسار عند عدد معين

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a .

إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تقبل النهاية ℓ_1 من اليمين عند a نقول أن f قابلة للاشتقاق من اليمين عند a .

إذا كانت الدالة $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تقبل النهاية ℓ_2 من اليسار عند a نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند a .



التفسير الهندسي

التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a, f(a))$ معامل توجيهه ℓ_1 و يقبل أيضا نصف مماس من اليسار عند A معامل توجيهه ℓ_2 .

إذا كان $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a والنقطة A تسمى نقطة زاوية.

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = \frac{3x+2}{|x-1|+3}$

- (1) ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_1) .
- (2) ادرس قابلية اشتقاق f على يسار 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_2) .

الحل

(1) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يمين 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ تقبل نهاية حقيقية لـ x يؤول إلى 1 بقيم أكبر.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{3x+2}{|x-1|+3} - \frac{5}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9x+6-5x-10}{3(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية على يمين الواحد وبالتالي f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 1 والعدد المشتق من اليمين هو $\ell_1 = \frac{4}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يمين A هي:

$$(T_1): y = \frac{4}{9}(x-1) + \frac{5}{3}, x \geq 1$$

(2) لمعرفة إن كانت f قابلة للاشتقاق على يسار 1 نبحث إن كانت النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية لـ x يؤول إلى 1 من اليسار.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3x+2}{-x+4} - \frac{5}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} = \ell_2$$

النسبة $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ لها نهاية حقيقية على يسار 1 بالتالي f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 1 والعدد المشتق من اليسار هو $\ell_2 = \frac{14}{9}$.

و معادلة نصف المماس لـ (C_f) على يسار A هي:

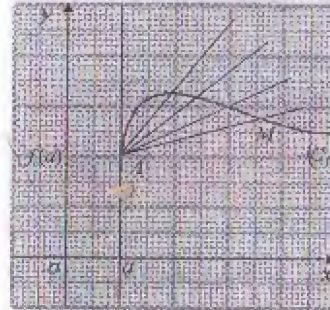
$$(T_2): y = \frac{14}{9}(x-1) + \frac{5}{3}, x \leq 1$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1.

والنقطة $A(1, \frac{5}{3})$ هي نقطة زاوية.

1-4 المماس العمودي لمنحن

إذا كانت f مستمرة عند a و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ فإن المنحني (C_f) يقبل مماس عمودي عند النقطة $A(a, f(a))$.



التفسير الهندسي

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ حيث f مستمرة عند a

تعني أن معاملات توجيه المستقيمات المارة من A والقاطعة لـ (C_f) تؤول إلى $(+\infty)$. إذن هذه المستقيمات تؤول إلى المستقيم ذي المعادلة $x = a$.

مثال -

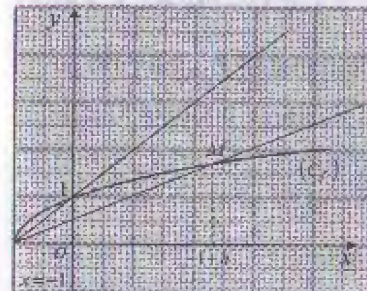
f دالة معرفة على المجال $[-1, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

الحل

من أجل $h > 0$ لدينا $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 . و بما أن النسبة تؤول إلى $(+\infty)$ لما h يؤول إلى الصفر فإن معامل توجيه المستقيم (AM) يصبح كبيرا جدا. إذن المماس لـ (C_f) عند $A(-1, 0)$ عمودي ومعادلته هي $x = -1$.



1-5 التقريب التآلفي وطريقة أولر

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h مع $x+h \in I$.

لدينا $f(x+h) = f(x) + h \times f'(x) + h \varepsilon(h)$ مع $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. نتحصل هكذا على التقريب $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ لما h يقترب من الصفر. نسمي $f(x) + h f'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h صغير جدا.

الإثبات

ليكن x عددا حقيقيا من I . بما أن f قابلة للاشتقاق عند x فإن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

نضع $\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ يكون:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = f'(x) - f'(x) = 0$$

$$f(x+h) - f(x) = h \times f'(x) + h \varepsilon(h) \quad (1)$$

$$\Delta x = x + h - x = h$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

العلاقة (1) تكتب:

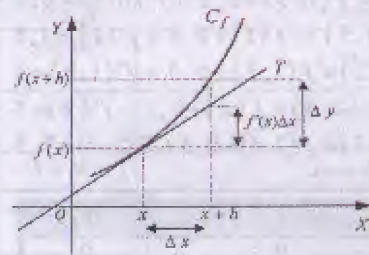
$$\Delta y = (\Delta x) f'(x) + (\Delta x) \varepsilon(\Delta x)$$

$$\Delta y \approx (\Delta x) f'(x)$$

ومنه التقريب هذا التقريب يقودنا إلى الكتابة الرمزية

$$dy = f'(x) dx$$

و تسمى هذه الأخيرة بالكتابة التفاضلية.



طريقة أولر

إن كثير من المسائل يحدث وأن نعرف الدالة المشتقة f' للدالة f و قيمة لـ f عند عدد (شروط أولي) $(y_0 = f(x_0))$ بدون معرفة العبارة الصريحة لـ f .

تسمح لنا طريقة أولر بإنشاء منحني تقريبي للدالة f .

لذلك نعتد على فكرة أنه من أجل h قريب

من الصفر يكون $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$.

$$f(x) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$$

بما أن لدينا $y_0 = f(x_0)$ نستطيع أن نعلم

نقطة من المنحني البياني لـ f وهي $A_0(x_0, y_0)$.

نختار عددا حقيقيا h غير معدوم و قريب من الصفر

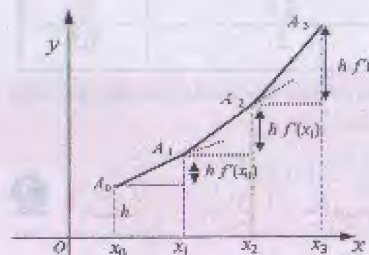
و بما أننا نعرف $f'(x_0)$ ننشئ النقطة A_1

ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ التي تنتمي إلى المستقيم المار من A_0

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ يكون ترتيبها $y_1 = f(x_0) + h \times f'(x_0)$

بما أن $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h f'(x_0)$ لما h يقترب من الصفر

فإن A_1 قريبة من (C_f) .



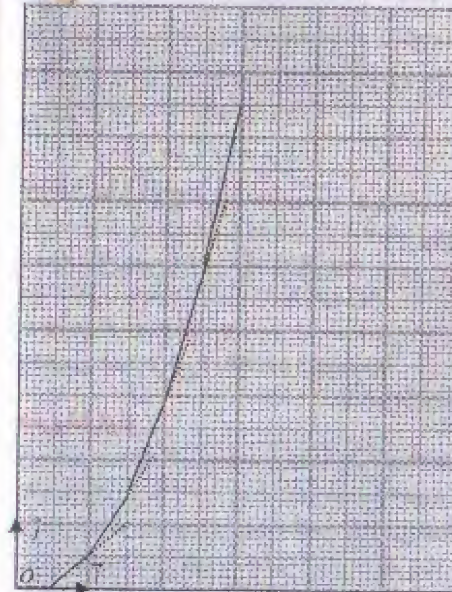
بنفس الطريقة و ابتداء من A_1 نستطيع إنشاء النقطة $A_2(x_1+h, f(x_1)+h f'(x_1))$ وهكذا نعلم النقطة A_n التي إحداثياتها $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + h f'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. وتسلسل القطع $[A_0, A_1], [A_1, A_2], \dots$ يعطي لنا تمثيلا بيانيا مقربا لـ (C_f) وهذا التمثيل متعلق بالخطوة h وكلما كانت h صغيرة جدا كلما كان النحنى دقيقا بالقدر الكافي.

مثال -

لتكن f دالة معرفة بـ $f(0)=0$ و $f'(x)=2x$ ، باستعمال طريقة أولر و بأخذ خطوة $p=0,5$ أنشئ جدول القيم المقربة لـ $f(x)$ من أجل كل x من $[0,3]$ ثم أنشئ منحنى تقريبي لـ f على هذا المجال.

الحل ✓

$$\begin{aligned} f(0,5) &= f(0) + 0,5 \times f'(0) = 0 \\ f(1) &= f(0,5) + 0,5 \times f'(0,5) = 0,5 \\ f(1,5) &= f(1) + 0,5 \times f'(1) = 1,5 \\ f(2) &= f(1,5) + 0,5 \times f'(1,5) = 3 \\ f(2,5) &= f(2) + 0,5 \times f'(2) = 5 \\ f(3) &= f(2,5) + 0,5 \times f'(2,5) = 7,5 \end{aligned}$$



x	$f(x)$
0	0
0,5	0,5
1	1,5
1,5	3
2	5
2,5	7,5
3	12

2 - مشتق الدوال المرجعية

1 - 2 عمليات على الاشتقاق

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على D (D مجال أو اتحاد مجالات) و k عدد حقيقي إذن الدوال $U+V$ ، kU و $U \times V$ قابلة للاشتقاق على D و لدينا:

$$(U \times V)' = U'V + U \times V' \text{ و } (U+V)' = U' + V' \text{ ، } (kU)' = kU'$$

و إذا كانت V غير معدومة على D فإن $\frac{U}{V}$ و $\frac{1}{V}$ قابلتان للاشتقاق على D و لدينا :

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2} \text{ و } \left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$$

ملاحظة

الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و الدالة الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

جدول مشتقات الدوال الشهيرة.

تعايق	الدالة المشتقة	الدالة
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$ (ثابت)
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$x \mapsto x$
$x \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto n x^{n-1}$	$x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
$x \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto n x^{n-1}$	$x \mapsto x^n$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$
$x \in]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$x \in \mathbb{R}$	$x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$	$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1$

تمرين تدريبي

من أجل كل دالة من الدوال التالية عين مجموعة تعريفها و مجموعة دالتها المشتقة ثم عين دالتها المشتقة :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} \quad (2) \quad f'(x) = 2x^3 + 5x - 1 \quad (1)$$

$$k(x) = x^2 \sin x \quad (4) \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - x + 3} \quad (3)$$

الحل ✓

- (1) الدالة f هي دالة كثيرة حدود معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا $f'(x) = 6x^2 + 5$
- (2) الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 + 3x \neq 0$

$x^2 + 3x \neq 0$ يكافئ $(x \neq -3)$ و $(x \neq 0)$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{0, -3\}$

و بما أن g دالة ناطقة فهي قابلة للاشتقاق على D_g و من أجل كل x من D_g لدينا :

$$g'(x) = \frac{(4x-1)(x^2+3x) - (2x+3)(2x^2-x+1)}{(x^2+3x)^2} = \frac{7x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$$

(3) من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2 - x + 3 > 0$ و منه مجموعة تعريف الدالة h هي \mathbb{R}

و بما أن الدالة h ناطقة فإنها قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا $h'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2-x+3)^2}$

(4) الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x^2$ معرفتان و قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و بالتالي الدالة $K = U \times V$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $K'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

3 - تطبيقات الاشتقاق

3-1 اتجاه التغير

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I محتوي في D_f .

- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

ملاحظة

إذا انعدمت f' عند بعض القيم من المجال I ولا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على تغيراتها.

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x^3$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 3x^2$

من أجل كل x من \mathbb{R}^* لدينا $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

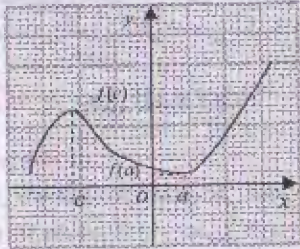
إذن الدالة f موجبة على \mathbb{R} و تنعدم عند 0 وبالتالي f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

3-2 القيم الحدية للدالة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I يشمل c .

الاشتقاقية و دراسة الدوال

القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح J محتوي في I ويشمل c بحيث من أجل كل x من J لدينا $f(x) \leq f(c)$ (أو $f(x) \geq f(c)$)



مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I يشمل c .

إذا انعدمت $f'(x)$ عند c مغيرة إشارتها في جوار c

فإن $f(c)$ هي قيمة حدية و المماس للمنحني (C_f)

عند النقطة $A(c, f(c))$ يكون أفقيا.

تمرين تدريبي

ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[-2, 3]$ بالشكل $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ واستنتج القيم الحدية لـ f على هذا المجال ثم اعط حصرًا لـ $f(x)$ على المجال السابق.

الحل

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة الحدود و بالتالي فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-2, 3]$ و من أجل كل x من $[-2, 3]$ لدينا $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=2)$

إشارة $f'(x)$ مدونة في الجدول المجاور

إذا كان $x \in]0, 2[$ فإن $f'(x) < 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $[0, 2]$

إذا كان $x \in]2, 3[$ أو $x \in]-2, 0[$ فإن $f'(x) > 0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-2, 0]$ و $[2, 3]$

و إليك جدول تغيرات الدالة f .

x	-2	0	2	3
إشارة $f'(x)$	+	0	-	+
تغيرات الدالة f	$f(-2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$

$$f(-2) = 18, f(0) = 2, f(2) = -2, f(3) = 2$$

$f(0) = 2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(3) = 2$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f على المجال $[0, 3]$

$f(-2) = 18$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[-2, 2]$

$f(2) = -2$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0, 3]$

البرك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	+	-	+
تغيرات f		$+3$	-1	$+\infty$

بما أن f متزايدة تماما على $]-\infty, -1[$ وصورة هذا المجال هي $]-\infty, 3[$ والصفر ينتمي إلى $]-\infty, 3[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

وكون $f(-2) = -1$ يكون $\alpha \in]-2, -1[$.

لتعيين حصر α بتقريب 10^{-3} نتبع طريقة ديكتومي.

$\alpha \in]-2, -1,5[$ إذن $f(m) = 0,125$ و $m = \frac{a+b}{2} = -1,5$

$\alpha \in]-2, -1,75[$ إذن $f(m') = 0,89$ و $m' = \frac{-2-1,5}{2} = -1,75$

$\alpha \in]-2, -1,87[$ إذن $f(m'') = 0,033$ و $m'' = -1,875$

$\alpha \in]-1,937, -1,87[$ إذن $f(m''') = -0,46$ و $m''' = -1,9375$

بما أن f متناقصة تماما على $]1, +\infty[$ وصورة هذا المجال هي $]3, +\infty[$ والصفر ينتمي إلى $]3, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β .

بنفس الطريقة نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1, +\infty[$.

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول.

4 - 3 استعمال العدد المشتق في حساب بعض النهايات

استطيع استعمال العدد المشتق لتعيين بعض النهايات.

إذا كانت لدينا عبارة من الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع f دالة قابلة للاشتقاق عند a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ نريد حساب } g(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \quad (1)$$

بوضع $f(x) = \cos x$ نجد $f(0) = 1$ بالتالي $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

لكن f قابلة للاشتقاق عند الصفر إذن $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = -\sin x$

ومنه نجد $f'(0) = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0) = 0$

$f(-2) = -18$ هي قيمة حدية صفري للدالة f على المجال $[-2, 3]$

العدد 2 هو قيمة حدية عظمى للدالة f على مجال $[-2, 3]$

و نتحصل عليها من أجل $x=0$ و $x=3$

ومنه من أجل كل x من $[-2, 3]$ يكون $-18 \leq f(x) \leq 2$.

3 - 3 حل المعادلات

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I = [a, b]$

(1) إذا كانت $f'(x) > 0$ على $[a, b]$ فإن من أجل كل k من $[f(a), f(b)]$

المعادلة $f(x) = k$ لها حل وحيد في المجال I .

(2) إذا كانت $f'(x) < 0$ على $[a, b]$ فإن من أجل كل k من $[f(b), f(a)]$

المعادلة $f(x) = k$ لها حل وحيد في المجال I .

ملاحظة

نتائج المبرهنة تبقى صحيحة حتى ولو انعدمت f' عند بعض القيم من I .

تمرين تدريبي 1

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(1) عين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول ثم اعط حصرًا بتقريب 10^{-3} للحل الذي ينتمي إلى $]-2, -1[$.

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (1)$$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على $[-1, 1]$.

- إذا كان $x \in]1, +\infty[$ أو $x \in]-\infty, -1[$ فإن $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$.

$$(2) \quad h(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{نريد حساب } \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{بوضع } f(x) = \sin x \text{ نجد } f(0) = 0 \text{ بالتالي } h(x) \text{ تكتب}$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ لدينا } f'(x) = \cos x$$

$$\text{ومن هنا نجد } f'(0) = 1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = f'(0) = 1$$

4 - مشتق دالة مركبة

4-1 نظرية أساسية

مبرهنة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق على مجال J وكانت U دالة قابلة للاشتقاق على I

و من أجل كل x من I لدينا $U(x) \in J$

فإن الدالة للعرف $f(x) = g(U(x))$ قابلة للاشتقاق على I

و من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = U'(x)g'(U(x))$

الإثبات

لكي نبرهن على أن f قابلة للاشتقاق على I

$$\text{يجب أن نبرهن أن الدالة } h \text{ للعرف } h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

لها نهاية عند a هي $U'(a)g'(U(a))$ حيث a كفي من I

- نفرض أنه من أجل كل x بجوار a و يختلف عنه $U(x) \neq U(a)$

و عليه من أجل كل x من هذا الجوار يمكن كتابة

$$h(x) = \frac{g(U(x)) - g(U(a))}{U(x) - U(a)} \times \frac{U(x) - U(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x) - U(a)}{x - a} = U'(a) \text{ إذن } a \text{ قابل للاشتقاق عند } a$$

$$\text{بوضع } t(x) = \frac{g(X) - g(U(a))}{X - U(a)} \text{ و } U(x) = X \text{ يكون } t(x) = \frac{g(U(x)) - g(U(a))}{U(x) - U(a)}$$

لكن U قابلة للاشتقاق عند a

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \text{ مع } X = U(x) = U(a) + (x - a)U'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(X) - g(U(a))}{X - U(a)} = g'(U(a)) \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} X = U(a)$$

لأن g قابلة للاشتقاق عند $U(a)$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = U'(a)g'(U(a)) \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g'(U(a)) \times U'(a)$$

ملاحظة

(1) للمبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كان f و J عبارة عن اتحاد مجالات

$$(2) \text{ نستطيع كتابة } (g \circ f)'(x) = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dU} \times \frac{dU}{dx}$$

تمرين تدريبي

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$$f_3(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad f_1(x) = (x^2 + 1)^2$$

الحل

f_1, f_2, f_3 هي دوال مركبة من الشكل $g \circ u$ وفي كل حالة لا بد من معرفة g و u

$$\text{نضع } f_1 = g_1 \circ u_1 \text{ حيث } g_1(x) = x^3 \text{ و } u_1(x) = x^2 + 1$$

الدالتان u_1 و g_1 قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن حسب المبرهنة السابقة الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ($I = J = \mathbb{R}$)

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } u_1'(x) = 2x \text{ و } g_1'(x) = 3x^2$$

$$\text{إذن } f_1'(x) = 2x(3)(x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$$

$$\text{نضع } f_2 = g_2 \circ u_2 \text{ حيث } f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ و } u_2(x) = x^2 + 1, \quad I = \mathbb{R}, \quad J =]0, +\infty[$$

الدالة u_2 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} والدالة g_2 قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و من أجل

كل x من I فإن $U(x) \in J$

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I \text{ لدينا } g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{و من أجل كل } x \text{ من } I \text{ لدينا } u_2'(x) = 2x$$

$$\text{إذن } f_2'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{نضع } f_3 = g_3 \circ u_3 \text{ حيث } f_3(x) = \cos x \text{ و } u_3(x) = \frac{1}{x}, \quad J = \mathbb{R}, \quad I = \mathbb{R}^*$$

و من أجل كل x من \mathbb{R}^* فإن $U(x) \in J$

$$\text{الدالة } u_3 \text{ قابلة للاشتقاق على } I \text{ ولدينا } u_3'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{الدالة } g_3 \text{ قابلة للاشتقاق على } J \text{ ولدينا } g_3'(x) = -\sin x$$

$$\text{إذن } f_3'(x) = u_3'(x)g_3'(u_3(x)) = \frac{1}{x^2} \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

4-2 مشتق الدالة العكسية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما و قابلة للاشتقاق على I وكانت $f'(x) \neq 0$ لا تنعدم على I فإن الدالة العكسية g للدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $J = f(I)$ ولدينا $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ مع $y = f(x)$.

الإثبات

من أجل كل x من I لدينا $(g \circ f)(x) = x$ ومنه من أجل كل x من I يكون $(g \circ f)'(x) = 1$ ولكون $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$ ينتج $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ بما أن $y = f(x)$ فإن $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ من أجل كل y من J .
نرمز إلى الدالة العكسية للدالة f بالرمز f^{-1} .

تمرين تدريبي

- دالة معرفة بالعلاقة $f(x) = 3x^2 + 6x$ في المجال $]-3, +\infty[$ أثبت أن f تقابل من المجال $]-\infty, -1[$ في المجال $]-3, +\infty[$.
- احسب بطريقتين مختلفتين $(f^{-1})'(0)$

✓ الحل

- الدالة f مستمرة على مجال $]-3, -1[$ لأنها دالة كثيرة حدود. الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة حدود ولدينا $f'(x) = 6x + 6$ من أجل كل x من $]-3, -1[$ لدينا $f'(x) < 0$ ولدينا f متناقصة تماما على $]-3, -1[$ بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-3, -1[$ فهي تقابل من $]-3, -1[$ في $]-3, +\infty[$ و بالتالي تقبل دالة عكسية f^{-1} .
حساب $(f^{-1})'(0)$ باستعمال التعريف
من أجل كل y من $]-3, +\infty[$ لدينا $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ حيث $y = f(x)$
 $y = 0$ معناه أن $3x^2 + 6x = 0$ ومنه نجد $x = 0$ أو $x = -2$
 $x = 0$ مرفوض لأن $0 \notin]-3, -1[$ و بالتالي قيمة x المقبولة هي -2

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{-6}$$

- حساب $(f^{-1})'(0)$ بتعيين عبارة f^{-1}

من أجل كل x من I و من أجل كل y من $J = f(I)$ ،

$$y = f(x) \quad \text{يكافئ} \quad 3x^2 + 6x - y = 0$$

$$3x^2 + 6x - y = 0 \quad \dots (I)$$

ليكن Δ مميز للمعادلة (I) ذات الجذور x .

$$\Delta = 6^2 - 4(3)(-y) = 36 + 12y$$

بما أن $y > -3$ فإن $\Delta > 0$ وبالتالي المعادلة (I) لها حلان مختلفان x_1 و x_2

$$\text{حيث} \quad x_1 = \frac{-6 + \sqrt{12y + 36}}{6} \quad , \quad x_2 = \frac{-6 - \sqrt{12y + 36}}{6}$$

من أجل كل $y \geq 0$ يكون $x_1 > 0$ وبالتالي x_1 لا ينتمي إلى $]-\infty, -1[$ و عليه x_2 مقبول

$$\text{إذن} \quad x_2 = f^{-1}(y) = \frac{-6 - \sqrt{12y + 36}}{6}$$

الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J = f(I)$ ولدينا $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{9+3x}}$

$$\text{إذن} \quad (f^{-1})'(0) = \frac{-1}{2\sqrt{9}} = \frac{-1}{6}$$

4-3 مشتق الدالة الجذرية \sqrt{u} و الدالة u^n مع $n \in \mathbb{Z}^+$

مبرهنة

« دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I »

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على مجال I

$$\text{و من أجل كل } x \text{ من } I \text{ لدينا } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

الإثبات

نوسع $\sqrt{x} = x^{1/2}$ يمكن كتابة f على الشكل $g \circ u$ و بتطبيق قاعدة مشتق الدالة

$$\text{الركبية نجد} \quad (g \circ u)'(x) = u'(x)g'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$$

ملاحظة

لعرفه إن كانت الدالة $f = \sqrt{u}$ قابلة للاشتقاق عند x_0 حيث $u(x_0) = 0$ ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ لا يؤول إلى x_0 .

مثال -

(1) f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $D_f = [2, +\infty[$

يمكن كتابة $U(x) = x-2$ مع $f(x) = \sqrt{u(x)}$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ و يبقى لنا دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$

لذلك ندرس نهاية النسبة $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ و بالتالي x يؤول إلى 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 . وبالتالي f قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$

(2) f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{(x+1)^4}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

الدالة f تكتب على الشكل $f(x) = \sqrt{u(x)}$ مع $u(x) = (x+1)^4$ و $u(-1) = 0$

الدالة u موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و بالتالي f قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ لكن $\mathbb{R} - \{-1\}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

مبرهنة 2

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و n عدد صحيح غير معدوم.

إذن الدالة f المعرفة بـ $f(x) = (u(x))^n$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا $f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$.

الإثبات

- حالة $n \in \mathbb{N}$

بوضع $g(x) = x^n$ يمكن كتابة f على الشكل $g \circ u$

من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = n x^{n-1}$ و منه $g'(u(x)) = n u^{n-1}(x)$

إذن من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$

- حالة n عدد صحيح سالب و $u(x)$ غير معدوم على I

$$f(x) = (u(x))^n = \frac{1}{(u(x))^{-n}}$$

بما أن $-n > 0$ فإن حسب الحالة الأولى،

$[(u(x))^{-n}]' = (-n) u'(x) (u(x))^{-n-1}$ و بتطبيق قاعدة مشتق القسمة نجد :

$$f'(x) = \frac{n u'(x) (u(x))^{-n-1}}{(u(x))^{-2n}}$$

$$f'(x) = n [u(x)]^{n-1} \times u'(x)$$

مبرهنة 3

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

إذن الدالتان $\sin u$ و $\cos u$ قابلتان للاشتقاق على I

و لدينا $(\sin u)' = u' \cos u$ و $(\cos u)' = -u' \sin u$

الإثبات

الدالة $\cos u$ من الشكل $v \circ u$ حيث $v(x) = \cos x$ و v قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا

$$v'(x) = -\sin x \text{ منه } v'(u(x)) = -\sin u(x)$$

بفرض الكيفية ثبتت العلاقة الثانية

مثال -

$$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$$

$$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b) \text{ و}$$

تمرين تدريبي

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f

$$(1) f(x) = \sqrt{x^2+x+1} \quad (\text{ب.}) \quad f(x) = (2x^2+x)^4$$

$$(\text{ج.}) f(x) = \sin^2 x \quad (\text{د.}) f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

الحل

(1) يمكن كتابة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ مع $u(x) = x^2+x+1$

الدالة f معرفة إذا كان $u(x) \geq 0$

لكن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) \geq 0$

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

بالتالي من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

(ب) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^4$ حيث $f(x) = 2x^2+2$

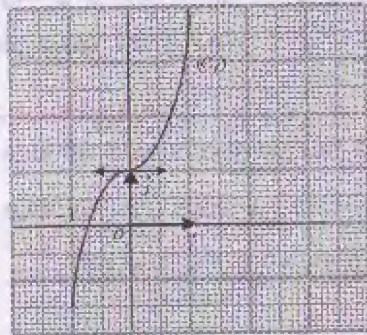
الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 4(2x^2+x)(2x^2+x)^3$

4-5 نقطة الانعطاف

إذا كانت f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من I مغيرة إشارتها في جوار x_0 فإن النحني البياني (C_f) للدالة f له نقطة انعطاف $A(x_0, f(x_0))$ والمماس لـ (C_f) عند A يخترق (C_f) .

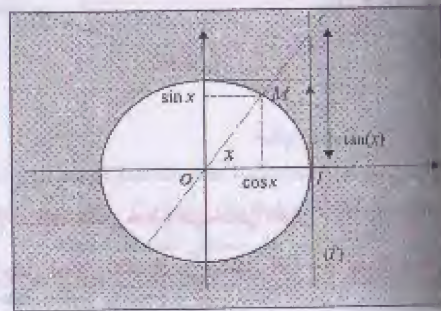


مثال -
 $f(x) = 3x^3 + 1$ دالة معرفة بالعبارة
 f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
 ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:
 $f'(x) = 9x^2$ و $f''(x) = 18x$
 $f''(x) = 0$ يكافئ $x = 0$
 f'' يتغير عند $x_0 = 0$ مغيرة إشارته في جوار 0 ومنه النقطة $A(0,1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

4-6 دالة الظل tan

دالة الظل التي نرمز لها بـ \tan معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل x من \mathbb{R} و $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع k عدد صحيح واليك بعض قيم \tan من أجل قيم شهيرة لـ x .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



خواص:

- من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ لدينا،
 $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ نقول عندئذ أن الدالة \tan دورية و دورها π .
- من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ لدينا $\tan(-x) = -\tan x$ نقول عندئذ أن الدالة \tan فردية

ج) يمكن كتابة $f(x) = (u(x))^2$ مع $f(x) = \sin x$

الدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

إذن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = 2(\cos x)(\sin x)$.

د) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{(u(x))^2}$ مع $u(x) = x^2 + x + 1$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) > 0$

الدالة u قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و لدينا $f'(x) = -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$

4-4 المشتقات المتتابة لدالة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة f

و إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f''(x)$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بـ f'' أو $f^{(2)}$

وهكذا إذا قبلت الدالة f الاشتقاق n مرة

حيث $n \geq 2$ على المجال I فإن الدالة المشتقة النونية للدالة f نرمز لها بـ $f^{(n)}$ و نكتب:

من أجل كل $n \geq 2$ ومن أجل كل x من I لدينا $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ و $f^{(1)}(x) = f'(x)$

ملاحظة

في الحركات لا $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك على خط مستقيم من اللحظة الابتدائية حتى اللحظة t فإن العددين $f'(t)$ و $f''(t)$ يمثلان على التوالي السرعة اللحظية و التسارع اللحظي للمتحرك في اللحظة t حيث:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} \text{ و } f''(t) = \frac{d^2f}{dt^2}$$

مثال -

$f(x) = x^4$ دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة

الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة

و أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا،

$$f^{(4)}(x) = 24, f^{(3)}(x) = 24x, f^{(2)}(x) = 12x^2, f^{(1)}(x) = 4x^3$$

و من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا $f^{(n)}(x) = 0$

التمثيل البياني للدالة \tan

النقطتان ذاتا الإحداثيات $(x, \tan x)$ و $(-x, \tan(-x))$ تنتميان إلى منحنى الدالة \tan و متناظرتان بالنسبة إلى البدا O إذن (γ) يقبل O كمركز تناظر له و لإنشاء المنحنى (γ) نرسمه أولا في مجال $[0, \frac{\pi}{2}]$ و تكمل الرسم باستعمال التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O و بالإنسحابات التتوالية التي اشعتها π و $-\pi$

دراسة الدالة \tan

الدالة \tan قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و لدينا $(\tan x)' = 1 - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

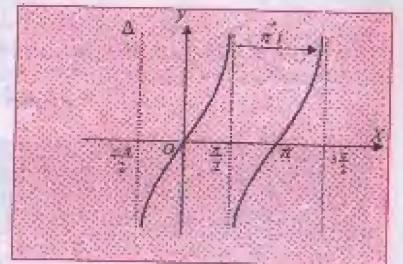
الدالة \tan متزايدة تماما لأن $\frac{1}{\cos^2 x} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

المستقيمات ذات المعادلة $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ مقاربة عمودية لـ (γ)

و إليك جدول تغيرات \tan على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و منحنائها البياني:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	+	+	+
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$



خاصة :

- (1) من أجل كل عدد حقيقي α المعادلة $\tan x = \alpha$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- (2) إذا كان α حلا للمعادلة $\tan x = \alpha$ فإن كل الحلول الأخرى من الشكل $\alpha + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

تمارين تدريبية

- (1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ بالمعادلة $f(x) = \tan x - 2x$
- (ب) برهن أن لـ (C_f) له مستقيما مقاربا عموديا ثم ارسم (C_f)

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, \frac{\pi}{2}]$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I هما :

$$x \mapsto \tan x \text{ , } x \mapsto -2x$$

و من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = -1 + \tan^2 x$

$f'(x)$ تكتب على شكل $f'(x) = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$

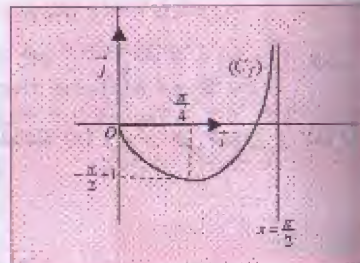
من أجل كل x من I لدينا $\tan x + 1 > 0$

إذا كان $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan x - 1 > 0$ و إذا كان $0 < x < \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan x - 1 < 0$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 \text{ , } f(0) = 0 \text{ , } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

(ب) يمان $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لـ (C_f)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{\pi}{2}+1$	$+\infty$



6 - المعادلات التفاضلية

1 - تعريف

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة و مشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق n مرة على I حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و التي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق إلى المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$ مع f دالة مألوفة.

2 - 6 المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

نضع (أ) $y = f(x)$

إذا كانت g حلا للمعادلة (1) فإن $g'(x) = f(x)$

إذا كان h حلا آخر للمعادلة (1) فإن $h'(x) = f(x)$

و منه نستنتج $g'(x) = h(x) + c$ اي $h(x) = g'(x) - c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = x^2$ تصبح لدينا $y' = x^2$

الدالة g التي مشتقتها يساوي x^2 هي $\frac{1}{3}x^3$

و منه للمعادلة $y' = x^2$ حلولها من الشكل $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$.

- في حالة $f(x) = \sqrt{x}$ المعادلة (1) تصبح $y' = \sqrt{x}$.

الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ والتي مشتقتها يساوي \sqrt{x} هي $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

وبالتالي حلول المعادلة $y' = \sqrt{x}$ هي $h(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = \sin x$ المعادلة (1) تصبح $y' = \sin x$.

الدالة g المعرفة على \mathbb{R} والتي مشتقتها تساوي $\sin x$ هي $g(x) = -\cos x$

و منه حلول المعادلة $y' = \sin x$ هي $h(x) = -\cos x + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x) = \cos x$ المعادلة (1) تصبح لدينا $y' = \cos x$.

الدالة g المعرفة على \mathbb{R} والتي مشتقتها تساوي $\cos x$ هي $g(x) = \sin x$

و منه حلول المعادلة $y' = \cos x$ هي $h(x) = \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

- في حالة $f(x)$ كثير حدود من الدرجة n حلول المعادلة $y' = f(x)$ هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} حيث $g(x)$ كثير حدود من الدرجة $(n+1)$.

إذا كان $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ فإن

$$g(x) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c$$

لأن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = f(x)$

و منه الدوال g هي حلول المعادلة $y' = f(x)$.

مثال.

$$(1) \quad y' = x^2 + x + 1 \quad \dots$$

حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c \quad \text{و } c \in \mathbb{R}$$

3-6 المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

لحل المعادلة $y' = f(x)$ نتبع ما يلي :

نبحث عن حلول المعادلة $K' = f(x)$ ثم نبحث عن حلول المعادلة $y' = K(x)$ لأن

$$y' = (y')' = (K(x))' = f(x)$$

○ حالة $f(x) = \cos x$

حلول المعادلة $K' = f(x)$ هي الدوال g المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = \sin x + c$

حلول المعادلة $y' = \sin x + c$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = -\cos x + c x + d$

حيث c و d عددين حقيقيين.

لأن الدوال h هي حلول المعادلة $y' = \cos x$.

○ حالة $f(x) = \sin x$

بنفس الكيفية السابقة نجد حلول هذه المعادلة التي هي الدوال من الشكل :

$$h(x) = -\sin x + c x + d$$

○ حالة $f(x) = \sqrt{x}$

حلول المعادلة $K' = \sqrt{x}$ هي الدوال g المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

حلول المعادلة $y' = K$ هي الدوال h المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x} + c x + d$

لأن الدوال h هي حلول المعادلة التفاضلية $y' = \sqrt{x}$.

○ حالة $f(x) = x^2$

حلول المعادلة $y' = x^2$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = \frac{1}{12}x^4 + c x + d$

حيث c و d عددين حقيقيين.

تمرين تدريبي

عزّين الحل الخاص للمعادلة $y' = x^2$ الذي يحقق $y'(0) = 1$ و $y'(1) = 2$

✓ الحل

حلول المعادلة التفاضلية $y' = x^2$ هي الدوال h المعرفة على \mathbb{R} بـ

$$h(x) = \frac{1}{12}x^4 + c x + d$$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $h'(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

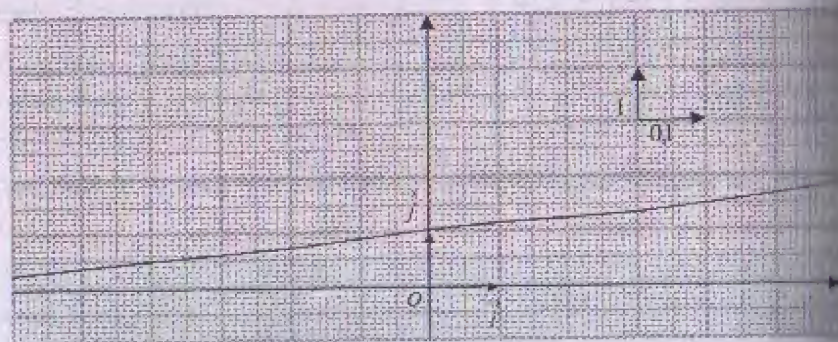
$h'(0) = 1$ يكافئ $c = 1$

$h'(1) = 2$ يكافئ $\frac{1}{3} + c = 2$ يكافئ $c = \frac{5}{3}$

لأن الحل الخاص المطلوب هو $h(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{3}x + 1$

k	y _k	k	y _k
0	1	6	1,77
1	1,10	7	1,94
2	1,21	8	2,14
3	1,33	9	2,35
4	1,46	10	2,59
5	1,61		

نلاحظ أنه كلما صغرت الخطوة h كلما كانت القيم y_1, \dots, y_n قريبة من $f(x_1), \dots, f(x_n)$ على التوالي.
الدالة التي تحقق $y' = y$ و $y(0) = 1$ تسمى الدالة الأسية و التي نرمز بـ \exp .



7 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = \frac{1}{x}$

مثال -

نعتبر المعادلة $y' = \frac{1}{x}$ ونضيف الشرط الابتدائي $y(1) = 0$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ بحيث $f(1) = 0$ و من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[1, 2]$ بخطوة $h = 0,1$.
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p = x_{p-1} + 0,1$ مع $x_0 = 1$ و $10 \geq p \geq 1$ و لكن y_0, \dots, y_{10} القيم المقربة للأعداد $f(x_0), \dots, f(x_{10})$ على التوالي مع $y_0 = 0$.
(1) احسب y_1 .
(2) بين أن $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$ ثم اعط جدولاً تبين فيه قيم x_p, y_p ثم ارسم المنحنى التقريبي لـ f .

7 - البحث عن الحل التقريبي للمعادلة $y' = y$

مثال -

نعتبر المعادلة $y' = y$ ونضيف الشرط الابتدائي $y(0) = 1$.
حل هذه المعادلة هو إذن دالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث $f(0) = 1$ و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = f(x)$.
نستعمل طريقة أولر من أجل إنشاء حل تقريبي على المجال $[0, 1]$ بخطوة $h = \frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معنوم.
نعرف المتتالية (x_p) بـ $x_p = x_{p-1} + h$ و $x_0 = 0$ و $x_n = 1$.
ونحسب القيم المقربة y_1, y_2, \dots, y_n للأعداد $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ بواسطة التقريب التالي للدالة f .
بما أن $f(0) = 1$ فإننا نضع $y_0 = 1$.
(1) احسب y_1 .
(2) أوجد علاقة تربط بين y_k و y_{k+1} ثم استنتج عبارة y_k بدلالة k .
ب. نفرض أن $n = 10$ احسب قيم y_k حيث $n \geq k \geq 1$.
ج. أنشئ المنحنى التقريبي لحل المعادلة $y' = y$ على المجال $[0, 1]$.

الحل ✓

(1) لدينا $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ وبما أن $f'(x) = f(x)$ من أجل كل x من $[0, 1]$ فإن $y_1 = f(x_0)(1+h) = 1+h = 1 + \frac{1}{n}$ إذن $f(x_0 + h) \approx f(x_0)(1+h)$.
(2) $f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k)$ وبما أن $f'(x_k) = f(x_k)$ فإن $f(x_k + h) \approx (1+h) f(x_k)$ إذن $y_{k+1} = (1+h) y_k$ (*) من المساواة (*) نستنتج أن (y_k) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$ و عليه نكتب $y_k = y_0 (1+h)^k$ أي $y_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$.
ب. بما أن $n = 10$ فإن $y_k = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^k = (1,1)^k$.
ج. المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من القطع $[M_k, M_{k+1}]$ حيث $M_k(x_k, y_k)$ و $n-1 \geq k \geq 0$.

✓ الحل

(1) $f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \times f'(x_0)$ لكن $f'(x_0) = f(x_0)$ ومنه ينتج ،

$y_1 = y_0 + \frac{h}{x_0} = \frac{h}{x_0} = 0,1$ إذن $f(x_0+h) \approx f(x_0) + \frac{h}{x_0}$

(2) $f(x_p+h) \approx f(x_p) + \frac{h}{x_p} \approx y_p + \frac{h}{x_p}$

ومنه $y_{p+1} = y_p + \frac{h}{x_p}$

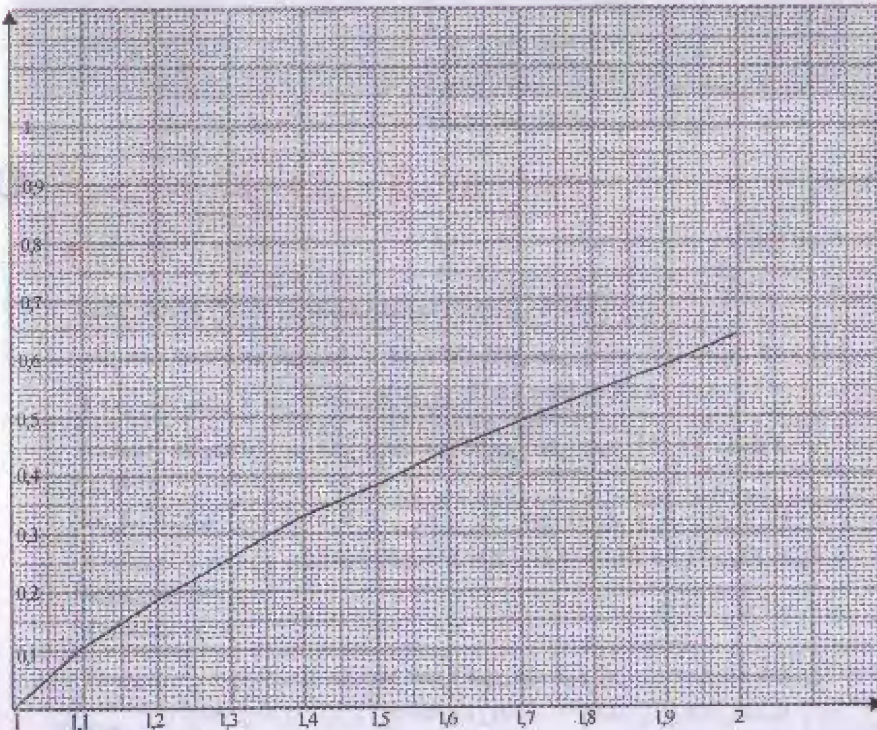
النحني التقريبي للدالة f مشكل من

تسلسل القطع $[M_k, M_{k+1}]$

حيث $9 \geq k \geq 0$ و $M_k(x_k, y_k)$

تسمى الدالة f التي تحقق $y' = \frac{1}{x}$ و $f(1) = 0$ بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية و نرسم لها بـ

"Ln"



تطبيقات نموذجية



1 تطبيق

دراسة قابلية الاشتقاق

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ عند $a=0$ (ب) $f(x) = x|x|$ عند $a=0$

(ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$ عند $a=0$ (د) $f(x) = \frac{x^2-|x|}{x^2+2}$ عند $a=0$

(هـ) عند $a=0$ $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

✓ الحل

f تقبل الاشتقاق عند عدد a يعني أن النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية حقيقية عند a

من أجل كل x من D_f و $x \neq 0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x} = 0$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس الاشتقاق من اليمين و من اليسار عند الصفر

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = \ell_1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 = \ell_2$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

بما أن $\ell_1 = \ell_2$ فإن f قابلة للاشتقاق عند $a=0$.

(ب) من أجل كل x من $D_f = [0, 1[$ يمكن كتابة $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر.

(د) مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

بما أن عبارة $f(x)$ تتغير في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من اليمين و من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} = \ell_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2 + 2} = \frac{-1}{2} = \ell_2$$

بما أن $\ell_1 \neq \ell_2$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (هـ)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\sin X}{X} = 0$$

مع $X = \frac{1}{x}$ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

تطبيق 2

لنحدد تعيين الدالة المشتقة

عين الدالة للمشتقة للدالة f على المجال العطلي في كل حالة من الحالات التالية:

$$I = \mathbb{R} , f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 4 \quad (أ)$$

$$I = \mathbb{R} , f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2 + 1} \quad (ب)$$

$$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ على } f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \quad (ج)$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (د)$$

الحل

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 6x - 6$.

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة ناطقة و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 3x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 12x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(د) المالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x - 1$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-\sin x)(\sin x - 1) - (\cos x)\cos x}{(\sin x - 1)^2} \\ &= \frac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1} \end{aligned}$$

(أ) الدالة $x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$

لنحدد تعيين معادلة المماس

تطبيق 3

اكتب معادلة المماس لـ (C_f) منحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة المعطاة في كل حالة من الحالات التالية

$$a=1, f(x) = x^2\sqrt{x} \quad (ب) \quad a=0, f(x) = x^3 + x^2 - 2x \quad (أ)$$

$$a=2, f(x) = \frac{x}{x^2+2} \quad (د) \quad a=\frac{\pi}{4}, f(x) = x\cos x \quad (ج)$$

الحل

لإيجاد f الاشتقاق عند a فإن منحنىها (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ و منه $f'(0) = -2$

إذن (C_f) يقبل مماس (d) عند $A(0, 0)$ معادلته $y = -2x$.

المالتان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x^2$ قابلتان للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و بالتالي الدالة $f = u \times v$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$

$$\text{إذن } f'(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

(C_f) يقبل مماس (d) عند النقطة $A(1, 1)$ معادلته $y = \frac{5}{2}(x - 1) + 1$

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما

$$f(x) = \cos x - x \sin x \quad \text{و } x \mapsto x \quad \text{و } x \mapsto \cos x$$

$$\text{و منه } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

منه (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$ معادلته

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(د) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما:

$$x \mapsto x^2 + 2 \text{ و } x \mapsto x \text{ ومنه } f'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} \text{ و بالتالي } f'(2) = \frac{-1}{18}$$

$$\text{ومنه معادلة المماس للمنحني } (C_f) \text{ عند } A\left(2, \frac{1}{3}\right) \text{ هي } y = \frac{-1}{18}(x-2) + \frac{1}{3}$$

تطبيق 4

المماس المشترك للمنحنيين

(1) f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = \frac{8}{x} + 1$ بين أن المنحنيين الممثلين لـ f و g يقبلان مماسين متوازيين عند النقطة ذات الفاصلة -1

(2) h و K دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $h(x) = x^3 + 2$ و $K(x) = \cos x + 1$ بين أن المنحنيين الممثلين لـ h و K يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

(1) الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$

$$\text{و من أجل كل } x \text{ من }]-\infty, 0[\text{ لدينا } f'(x) = 6x - 2 \text{ و } g'(x) = \frac{-8}{x^2}$$

المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما مماسان متوازيان عند النقطة ذات الفاصلة -1 يعني أن:

$$g'(-1) = f'(-1)$$

بما أن $f'(-1) = -8$ و $g'(-1) = -8$ فإن (C_g) و (C_f) لهما مماسان متوازيان ميلهما -8 عند النقطة ذات الفاصلة -1

(2) الدالتان h و K قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $h(x) = 3x^2$ و $K(x) = -\sin x$

$$\text{ومنّه ينتج } h'(0) = 0 \text{ و } K'(0) = 0 \text{ و } h(0) = 2 \text{ و } K(0) = 2$$

إذن (C_h) و (C_K) لهما نفس المماس (d) معادلته $y = 2$

تطبيق 5

تعيين مماس موازي لمستقيم معلوم

$$(C_f) \text{ المنحني البياني للدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2 + 2}$$

(1) أعط معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

تطبيق 6

دراسة قابلية الاشتقاق وحساب العدد المشتق

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \frac{x^3 + |x|}{x^2 + 2}$$

(1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0؟ فسر هندسيا هذه النتيجة

(2) احسب $f'(x)$ من أجل كل $x \neq 0$

الاشتقاق ودراسة الدوال

(2) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{1}{4}x$

(3) هل توجد مماسات لـ (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة $y = -2x$

الحل

(1) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا } f'(x) = \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$$

$$\text{و } f'(1) = \frac{1}{9} \text{ و } f(1) = \frac{2}{3} \text{ ومنه معادلة المماس هي } y = \frac{1}{9}x - \frac{7}{9}$$

(2) هل المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$

$$\text{المماس لـ } (C_f) \text{ عند النقطة ذات الفاصلة } x_0 \text{ يوازي المستقيم ذا المعادلة } y = -\frac{1}{4}x$$

$$\text{يعني } f'(x_0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4} \text{ يكافئ } \frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = -\frac{1}{4} \text{ يكافئ } x_0^4 + 12 = 0$$

بما أن $x_0^4 + 12 > 0$ فإن المعادلة $x_0^4 + 12 = 0$ ذات المجهول x_0 ليس لها حلول في \mathbb{R} و

$$\text{بالتالي لا يوجد مماس لـ } (C_f) \text{ يوازي المستقيم ذا المعادلة } y = -\frac{1}{4}x$$

(3) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = -2x$

$$\text{هذا معناه أن } f'(x_0) = -2$$

$$f'(x_0) = -2 \text{ يكافئ } \frac{2-x_0^2}{(2+x_0^2)^2} = -2 \text{ يكافئ } -2x_0^4 - 7x_0^2 - 10 = 0 \text{ ... (1)}$$

$$\text{بوضع } X_0 = x_0^2 \text{ للمعادلة (1) تصبح } -2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(-2)(-10) < 0$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة $-2X_0^2 - 7X_0 - 10 = 0$ ليس لها حلول في \mathbb{R} .

وبالتالي لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم $y = -2x$.

✓ الحل

(1) بما أن الدالة f تغير عبارتها في جوار الصفر فإننا ندرس قابلية اشتقاق f من يمين و من يسار الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2 + 2} = -\frac{1}{2} = \ell_1$$

منه f قابلة للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{(x^2 + 2)x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} = \ell_2$$

و منه f قابلة للاشتقاق من اليمين عند الصفر.

بما أن $\ell_2 \neq \ell_1$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و (C_f) له نصفاً مماسين ميلها ℓ_1 و ℓ_2 .

$$(2) \text{ بما أن } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}, & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 2}, & x \leq 0 \end{cases} \text{ فإن } \begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $\left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 2}\right)' = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2)^2}$

الدالة $x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^2 + 2}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$ ولدينا $\left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 2}\right)' = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x^2 + 2)^2}$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2)^2}, & x > 0 \\ f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x^2 + 2)^2}, & x < 0 \end{cases} \text{ إذن}$$

نلاحظ أن المماس العمودي للنحني

✓ تطبيق 7

f دالة معرفة على المجال $[1, +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و (C_f) تمثيلها البياني

$$(a) \text{ بين أن } \frac{f(x)}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$$

(ب) عين $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ ، هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند الواحد؟
فسر هندسياً النتيجة المحصل عليها سابقاً.

✓ الحل

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x-1} = \frac{x^2 - x}{(x-1)\sqrt{x^2 - x}} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2 - x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 - x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} = +\infty$$

نستنتج من نتيجة السؤال (ب) أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين الواحد و المنحني (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات القاصلة 1 يوازي محور الترتيب.

نلاحظ أن التقريب التآلفي

✓ تطبيق 8

f دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و $f(1) = 2$ باستعمال خطوة قدرها 0,1 أوجد القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$ و $f(1,2)$.

✓ الحل

لدينا $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ و عليه

$$f(1,1) \approx f(1) + 0,1 \times f'(1) \approx 2 + 0,1 \times \sqrt{2} \approx 2,141$$

$$f(1,2) \approx f(1,1) + 0,1 \times f'(1,1) \approx 2,141 + 0,1 \times \sqrt{2,21} \approx 2,289$$

نلاحظ أن إنشاء المنحني التقريبي باستعمال طريقة أولر

✓ تطبيق 9

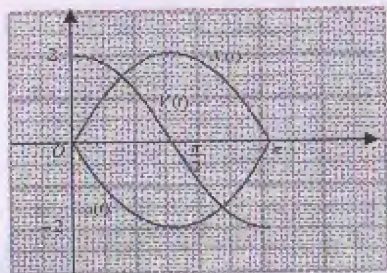
f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$

$$\text{بحيث } f(0) = 1 \text{ و } f'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

باستعمال طريقة أولر و بخطوة قدرها 0,2 عين القيمة التقريبية لـ $f(1)$.
ثم انشئ التمثيل البياني القرب لـ (C_f) على المجال $[0,1]$.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	1	1,20	1,40	1,58	1,74	1,86

(ب) ما هو التسارع $a(t)$ عند اللحظة t ؟
(ج) ما هي العلاقة التي تربط بين $X(t)$ و $a(t)$ ؟ ثم انشئ في نفس العلم التمثيلات البيانية للحركة والتسارع والسرعة على المجال $[0, \pi]$.



$$V(t) = (X(t))'$$

$$= (2 \sin t)' = 2 \cos t$$

$$a(t) = (V(t))'$$

$$a(t) = (2 \cos t)' = -2 \sin t$$

$$a(t) = (-2 \sin t) = -X(t)$$

الحل

نظرية القيم المتوسطة وحل المعادلات

$f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{5}{6}$ دالة معرفة من أجل كل x من \mathbb{R}

(1) شكل جدول تغيرات f على \mathbb{R}

(2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

(3) نسمي α الحل الذي ينتمي إلى $[-\frac{1}{3}, 1]$ أعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-2}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f'(x)$ تكتب على الشكل $(x-1)(3x+1)$

إذا كان $x \in [1, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{1}{3}]$ فإن $f'(x) \geq 0$ و f متزايدة تماما على كل من

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-	+
تغيرات f		↗	↘	↗

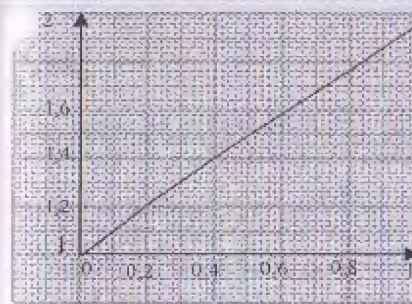
$]-\infty, -\frac{1}{3}]$ و $[1, +\infty[$

إذا كان $x \in [-\frac{1}{3}, 1]$

فإن $f'(x) \leq 0$ و f متناقصة تماما على

$[-\frac{1}{3}, 1]$

الحل



$f(0,2) \approx f(0) + 0,2 f'(0)$
 $f(0,4) \approx f(0,2) + 0,2 f'(0,2)$
 $f(0,6) \approx f(0,4) + 0,2 f'(0,4)$
 $f(0,8) \approx f(0,6) + 0,2 f'(0,6)$
 $f(1) \approx f(0,8) + 0,2 f'(0,8)$
 منه القيمة التقريبية لـ $f(1)$ هي 1,86
 التمثيل البياني المقرب لـ (C_f) مشكل
 من القطع $[M_K, M_{K+1}]$ مع $5 \geq K \geq 0$

إيجاد عبارة دالة

تطبيق 10

f دالة معرفة من أجل كل $x \neq 1$ بـ $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x-1}$ حيث a و b عدنان حقيقيان. أوجد a و b بحيث الدالة f لها قيمة حدية معدومة عند -1 .

الحل

بما أن الدالة f لها قيمة حدية محلية معدومة عند $x = -1$ فإن $f(-1) = 0$

وبما أن القيمة الحدية المحلية عند $x = -1$ معدومة فإن $f(-1) = 0$

$f(-1) = 0$ - تكافئ $\frac{a-b+1}{-2} = 0$ يكافئ $a-b+1=0$ (1)

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - 1}{(x-1)^2}$

إذن $f'(-1) = \frac{3a-b-1}{4}$

$f'(-1) = 0$ يكافئ $3a-b-1=0$ (2)

من (1) نجد $a = -1 + b$ نعوضه في (2) نجد $b = 2$

إذن $a = -1 + 2 = 1$ وبالتالي $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-1}$

السرعة والتسارع اللحظيين

تطبيق 11

جسم متعلق على حافة نابض يهتز أفقيا. معادلة حركته هي $X(t) = 2 \sin t$ مع X بالسنتيمتر و t بالثانية.
 (أ) ما هي السرعة $V(t)$ عند اللحظة t

ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $1 \geq \sin x \geq -1$
وبإضافة $-x$ إلى حدود هذه الأخيرة نجد $1-x \geq \sin x - x \geq -1-x$
لأن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
ومنه $f(x)$ تنتمي إلى $]-\infty, +\infty[$.

بما أن $f'(x) \leq 0$ على \mathbb{R} و 2 ينتمي إلى \mathbb{R}
فإن المعادلة $f(x) = 2$ أي $\sin x - x = 2$ لها حل وحيد α ينتمي إلى \mathbb{R} .

نضع $f(x) = x(2x+1)^2$
الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = (2x+1)(6x+1)$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{27}, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-	+
تغيرات f		↗ 0	↘ $-\frac{2}{27}$	↗ $+\infty$

الدالة f متزايدة تماماً
على كل من المجالين

$$\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right] \text{ و } \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

و متناقصة تماماً على

$$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right]$$

بما أن $f'(x) > 0$ على $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{6}, 0[$ و $0, 5[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}[$ و $]-\frac{1}{6}, 0[$ و $0, 5[$

فإن المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$ ليس لها حلول في المجال $]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}[$

بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $]-\frac{1}{6}, 0[$ و $0, 5[$

فإن المعادلة $f(x) = 5$ أي $x(2x+1)^2 = 5$ لها حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]-\frac{1}{6}, 0[$

إذن للمعادلة $f(x) = 5$ حل وحيد α على \mathbb{R} .

(2) - بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $]-\infty, -\frac{1}{3}[$ و $]-\frac{55}{54}, -\infty[$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد في المجال $]-\infty, -\frac{1}{3}[$

- بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $]-\frac{1}{3}, 1[$ و $]-\frac{1}{6}, \frac{55}{54}[$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد في المجال $]-\frac{1}{3}, 1[$

- بما أن $f'(x) > 0$ على المجال $1, +\infty[$ و $]-\frac{1}{6}, +\infty[$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $1, +\infty[$
إذن $f(x) = 0$ لها ثلاثة حلول في \mathbb{R} .

(3) تعيين حصر لـ α باستعمال طريقة الديكوتومي

نضع $a = -\frac{1}{3}$ ، $b = 1$

$$f(x_0) = \frac{23}{54} > 0 \quad , \quad x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1) = \frac{1}{54} > 0 \quad , \quad x_1 = \frac{x_0+b}{2} = \frac{2}{3}$$

$$f(x_2) = \frac{-25}{216} < 0 \quad , \quad x_2 = \frac{x_1+b}{2} = \frac{5}{6}$$

إذن الحل α ينتمي إلى $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ ومنه الحصر $0,66 < \alpha < 0,83$.

تطبيق 18

تعيين عدد حلول معادلة باستعمال دراسة دالة

حدد عدد الحلول على \mathbb{R} للمعادلتين في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$(1) \sin x - x = 2 \quad , \quad (2) x(2x+1)^2 = 5$$

الحل

(1) نضع $f(x) = \sin x - x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \cos x - 1$

ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) \leq 0$

ومنه $f'(x)$ سالب و ينعدم عند القيم من الشكل $x = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي f متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

تطبيق 14

تعيين القيمة المقربة و القيمة المضبوطة لحل معادلة

$$f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4 \quad \text{بالمعادلة}$$

تطبيق 15

حساب مشتق الدوال المركبة

(1) عيّن الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بالعبارة $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$

(2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية

(أ) $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$ (ب) $h(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-1}$

(ج) $K(x) = \sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}$ (د) $L(x) = \frac{2(\cos x)^2+1}{\cos x-1}$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها ناطقة ومن أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

(2) يمكننا وضع $g(x) = f(\sqrt{x})$ على الشكل $g(x) = f(\sqrt{x})$

$$g'(x) = (\sqrt{x})' f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{2x - 4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

(ب) لدينا $h(x) = f(x^2)$ ومنه $h'(x) = (x^2)' f'(x^2) = 2x \times \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x^2-1)^2}$

(ج) يمكننا وضع $K(x)$ على الشكل $K(x) = \sqrt{f(x)}$

$$K'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{\frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x^2+1}{x-1}}} = \frac{(2x^2 - 4x - 1)(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{2x^2+1}(x-1)^2}$$

(د) لدينا $L(x) = f(\cos x)$ ومنه $L'(x) = (\cos x)' f'(\cos x) = -\sin x \times \frac{2(\cos x)^2 - 4\cos x - 1}{(\cos x - 1)^2}$

تطبيق 16

حساب مشتق دالة باستعمال مشتق دالة مركبة

f دالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{2x+2}{x-2}$

(1) عيّن الدالة المشتقة f' للدالة f

(2) لتكن g دالة معرفة على المجال $I =]4, +\infty[$ بالعبارة $g(x) = f(\sqrt{x})$

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I

(1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم اعط حصراته بتقريب 10^{-2} و اوجد بطريقة جبرية القيمة الضبوطة لـ α .

✓ الحل

(1) الدالة f معرفة على $]1, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$

من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } f(1) = -3$$

(2) - بما أن $f'(x) > 0$ و $f(1) = -3$ و $f(3) = \sqrt{2} - 1$ و $f(2) = -1$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]-3, +\infty[$

- نلاحظ أن $f(2) = -1$ و $f(3) = \sqrt{2} - 1$ ومنه α ينتمي إلى $]2, 3[$.
نستعمل طريقة النسخ لتعيين قيمة تقريبية لـ α

x	$f(x)$
2,0	-1
2,1	-0,8511
2,2	-0,7045
2,3	-0,5598
2,4	-0,4167
2,5	-0,27
2,6	-0,1350
2,7	+0,0038

$p = 0,1$

x	$f(x)$
2,60	-0,1350
2,61	-0,1211
2,62	-0,1072
2,63	-0,0932
2,64	-0,0793
2,65	-0,065
2,66	-0,051
2,67	-0,037
2,68	-0,0238
2,69	-0,01
2,70	+0,0038

$p = 0,01$

إذن $2,68 < \alpha < 2,70$ ومنه 2,70 هي القيمة القريبة بالزيادة لـ α إلى 10^{-2} .

• $f(x) = 0$ يكافئ $x - 4 + \sqrt{x-1} = 0$

يكافئ $(4-x)^2 = x-1$ و $1 \geq x \geq 4$

يكافئ $x^2 - 9x + 17 = 0$

$$\Delta = 81 - 4(17) = 81 - 68 = 13$$

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$$

x_1 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[1, 4]$ إذن القيمة الضبوطة لـ α هي $\alpha = \frac{9 - \sqrt{13}}{2}$.

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة ولدينا $f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2}$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2, +\infty[$

و الدالة $u: x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]4, +\infty[$

و من أجل كل x من I لدينا $u(x) \in J$

إذن الدالة $g = f \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و من أجل كل x من I لدينا

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{-6}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{-3}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-2)^2}$$

✓ الحل

إذا كانت نهاية دالة f عند a من الشكل $\frac{0}{0}$ وكانت $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق عند a فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g'(a)$

(أ) بوضع $g(x) = \cos x$ نجد $g(0) = 1$

و منه نكتب $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ على الشكل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = -\sin x$ ومنه نجد $g'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0) = 0$$

(ب) بوضع $g(x) = \tan x$ نجد $g(0) = 0$ و منه $f(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$

من أجل كل $x \in D_g$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ومنه نجد $g'(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = g'(0) = 1$$

(ج) بوضع $g(x) = \sqrt{x+7}$ نجد $g(2) = 3$

و منه يمكن كتابة $f(x) = \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ على الشكل

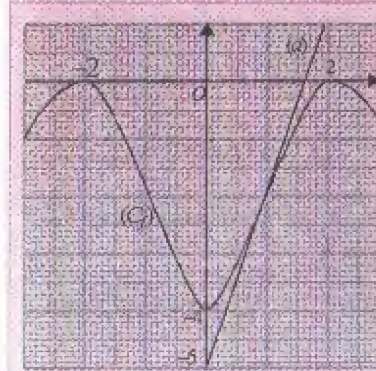
الدالة g قابلة للاشتقاق على $] -7, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند $a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+7}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = g'(2) = \frac{1}{6}$$

تطبيق 17

حساب العدد المشتق بيانياً



f دالة معرفة على \mathbb{R}

تمثيلها البياني و المماس عند

النقطتين ذواتا الفاصلتين 1 و 0

كما هو مبين في الشكل المجاور

لتكن g و h دالتين معرفتين

من أجل كل x من \mathbb{R}

ب. $h(x) = f(x^2)$ و $g(x) = (f \circ f)(x)$

(1) باستعمال هذا البيان عين

$f'(1)$ ، $f'(-2)$ ، $f(-2)$ ، $f(1)$

(2) استنتج $g'(1)$ و $h'(1)$

✓ الحل

(1) من البيان نجد $f(1) = -2$ ، $f(-2) = 0$

لدينا $f'(-2) = 0$ لأن المماس عند النقطة ذات الفاصلة -2 موازي لـ (x, x)

- ميل المستقيم (d) هو $f'(1)$ حيث $f'(1) = \frac{-2+5}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$

(2) بما أن $g(x) = f(f(x))$ فإن $g'(x) = f'(x) \times f'(f(x))$

إذن $g'(1) = f'(1) \times f'(f(1))$ أي $g'(1) = 3 \times f'(-2) = 0$

- بما أن $h(x) = f(x^2)$ فإن $h'(x) = 2x f'(x^2)$

إذن $h'(1) = 2 f'(1) = 2 \times 3 = 6$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{1}{6}$

(ب) نضع $f(x) = x^4 - 1$ و $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ عندئذ $f(1) = g(1) = 0$ الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 1$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 3x^2 - 4} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{9}$

(ج) نضع $f(x) = \sin(2x)$ و $g(x) = x - \pi$ منه $f(\pi) = g(\pi) = 0$ الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = \pi$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{x - \pi} = \frac{f'(\pi)}{g'(\pi)} = 2$

(د) نضع $f(x) = \cos x + \sin x - 1$ و $g(x) = \sin x - \cos x + 1$ عندئذ $f(0) = g(0) = 0$ الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 0$

و منه حسب قاعدة لوبيتال نجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1$

المشتقات المتتالية

تطبيق 20

$f(x) = \frac{1}{x+1}$ ب $x \neq -1$ من أجل لكل

(1) احسب $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ ، $f^{(4)}(x)$

(2) خمن عبارة $f^{(n)}(x)$ من أجل لكل $n \geq 1$ ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين

الحل

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ ، $f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$ ، $f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$

نلاحظ أن $24 = (-1)^4 \times 4!$ ، $-6 = (-1)^3 \times 3!$ ، $2 = (-1)^2 \times 2!$ ، $-1 = (-1)^1 \times 1!$

الآن عبارة $f^{(n)}(x)$ تكون من الشكل $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

نسمي p_n الخاصية المراد إثباتها.

من أجل $n=1$ لدينا $f^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^1 \times 1!}{(x+1)^{1+1}}$

و منه p_1 صحيحة.

(د) بوضع $g(x) = (x+2)^3$ نجد $g(-1) = 1$

ومنه $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x) = \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} \times \frac{1}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند $a = -1$ ولدينا $g'(-1) = 3$

و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$ وحسب قاعدة جداء النهايات نجد $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

قاعدة لوبيتال

تطبيق 19

(1) بين أنه إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند العدد x_0

وبحيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

(2) استعمل هذه القاعدة لحساب:

(أ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ ، (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3+3x^2-4}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ ، (د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin x - \cos x + 1}$

الحل

(1) f و g قابلتان للاشتقاق عند x_0 هنا معناه أن:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$

بما أن $f(x_0) = g(x_0) = 0$ فإنه يمكن كتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على الشكل:

$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)}$ مع $x \neq x_0$

إذن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

(2) نضع $f(x) = \sqrt{x+7} - 3$ و $g(x) = x - 2$

ومنه نجد $f(2) = g(2) = 0$

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق عند $x_0 = 2$

نفرض أن p_n صحيحة أي $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

$$f^{(n+1)}(x) = f'(f^{(n)}(x)) = \frac{-(n+1)(-1)^n \times n! (x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}}$$

$$= \frac{[(n+1) \times n!] \times (-1)^{n+1} \times (x+1)^n}{(x+1)^{2n+2}} = \frac{(n+1)! \times (-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

ومنه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$.

تطبيق 4

نقطة الإنعطاف

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(1) احسب $f^{(0)}(x)$ ، $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(n)}(x)$ مع $n \geq 1$.

(2) عيّن إشارة $f^{(2)}(x)$ ماذا تستنتج؟

الحل

$$f^{(0)}(x) = f'(x) = x^2 - 4x + 3 \quad (1)$$

$$f^{(2)}(x) = f'(f^{(1)}(x)) = 2x - 4$$

$$f^{(3)}(x) = f'(f^{(2)}(x)) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = f'(f^{(3)}(x)) = 0$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f^{(n)}(x) = 0$

(2) $f^{(2)}(x)$ يتعدم عند $x = 2$ مغيرا إشارته في جوار 2

إذن $(2, f(2))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

- إذا انعدم $f^{(1)}(x)$ عند x_0 ولا يغير إشارته فإن $(x_0, f(x_0))$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) .

تطبيق 5

دراسة اتجاه تغير دالة

ادرس اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية:

$$(1) f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 2 \quad (ب) f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$$

$$f(x) = \frac{3-x^2}{3+x^2} \quad (د) f(x) = \frac{x^2+2x+1}{1-x}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \quad (هـ) f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$$

$$(ن) f(x) = \cos^2 x - 2 \quad \text{على المجال } [0, \pi]$$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 3x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(3)(5) = -56$$

$\Delta < 0$ منه المعادلة $3x^2 + 2x + 5 = 0$ ليس لها حلول في \mathbb{R} وإشارة $f'(x)$ من إشارة معامل (x^2)

إذن من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

(2) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{-11}{(x+5)^2}$

من أجل كل x من D_f لدينا $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, 5[$ و $]5, +\infty[$.

(3) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (x=3) \text{ أو } (x=-1)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+2x+3)$.

- إذا كان x ينتمي إلى $[-1, 3]$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تما على $[-1, 3]$.

- إذا كان $x \in]3, +\infty[\cup]-\infty, -1]$ فإن $f'(x) \leq 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]3, +\infty[$.

(4) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \frac{-12x}{(3+x^2)^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 0$$

- إذا كان $x \leq 0$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty, 0]$

- إذا كان $x \geq 0$ فإن $f'(x) \leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $[0, +\infty[$.

(5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x+1)^4}$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 1$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1+x)(1-x)$.

- إذا كان $x \in [-1, 1]$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[-1, 1]$

- إذا كان $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1]$ فإن $f'(x) \leq 0$

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$.

الاشتقاق ودراسة الدوال

- (3) بما أن $f'(x) < 0$ على \mathbb{R} و $0 \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α على \mathbb{R} حيث $0 < \alpha < 1$ لأن $f(0) > 0$ و $f(1) < 0$ وباستعمال طريقة ديكتومي نجد $\alpha = \frac{1}{2}$.
- (4) إذا كان $x < \alpha$ فإن $f(x) < 0$ وإذا كان $x > \alpha$ فإن $f(x) > 0$.
- (أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = f(x)$.
- (ب) $g'(x) = 0$ يكافئ $f(x) = 0$ يكافئ $x = \alpha$.
- (ج) إذا كان $x < \alpha$ فإن $g'(x) < 0$ و عليه الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty, \alpha[$.
- (د) إذا كان $x > \alpha$ فإن $g'(x) > 0$ و عليه الدالة g متزايدة تماما على $]\alpha, +\infty[$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	-
تغيرات g		$g(\alpha)$	

من جدول تغيرات g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $g(x) \leq g(\alpha)$ و بما أن $g(\alpha) = \frac{7}{16}$ فإن $g(x) \leq \frac{7}{16}$.

تطبيق (24)

دراسة دالة ناطقة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 10}{2x + 4}$

و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) احسب نهاية f عند $-\infty$ و عند $(+\infty)$.

(ب) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f) .

(2) ادرس نهاية f عند -2 ماذا تستنتج؟

(3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن $H\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (1)$$

(ب) معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) إذا و فقط إذا كان

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = 0$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{8}{2x + 4} = 0$$

(و) الدالة f قابلة للاشتقاق على $D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$ و $x \in D$.

بما أن $0 \notin D$ فإن المعادلة $f'(x) = 0$ ليس لها حلول في D .

- إذا كان $x > 2$ فإن $f'(x) > 0$ و منه f متزايدة تماما على $]2, +\infty[$.

- إذا كان $x < -2$ فإن $f'(x) < 0$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty, -2[$.

(ن) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, \pi]$ ولدينا $f'(x) = -2 \sin x \cos x$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$ أو $x = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{2}$.

- إذا كان $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فإن $f'(x) \leq 0$ و منه f متناقصة تماما على $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- إذا كان $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

تطبيق (25) استعمال إشارة دالة لتحديد اتجاه دالة أخرى

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - 6x + 2$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} .

(2) عين عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على \mathbb{R} ثم اعط حصراتها.

(3) استنتج من الأسئلة السابقة إشارة f .

(4) g دالة معرفة بـ $g(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x$.

(أ) باستعمال الأسئلة السابقة عين اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} .

(ب) استنتج أن من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $g(x) \leq \frac{7}{16}$.

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty \quad (1)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -12x^2 + 12x - 6$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$			
تغيرات f			

$f'(x) = 0$ يكافئ $2x^2 - 2x + 1 = 0$

المعادلة $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ليس لها

حلول في \mathbb{R} لأن مميزها سالب

إذن المشتق لا يعدم و بالتالي إشارة

$f'(x)$ هي نفس إشارة معامل (x^2)

و عليه $f'(x) < 0$.

إذن $y = x + \frac{1}{2}$ معادلة المستقيم القارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

(2) بما أن $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+4) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2+5x+10) = 8$ فإن

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

ومنه نستنتج أن للمستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

(3) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x) = \frac{2x(x+4)}{2(x+2)^2}$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

$f'(x) = 0$ تكافئ $(x=0)$ أو $(x=-4)$.

- إذا كان $x \in [-4, -2[\cup]-2, 0]$ فإن $f'(x) \leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-4, -2]$ و $[-2, 0]$.

- إذا كان $x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -4[$ و $]0, +\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		\circ		\circ	
تغيرات f	$-\infty$	$f(-4)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

$f(-4) = -5,5$ و $f(0) = 2,5$

(4) $H(-2, -1,5)$ مركز

تناظر لـ (C_f)

إذا وفقط إذا كان

$$f(2(-2)-x) = -f(x) + 2(-1,5)$$

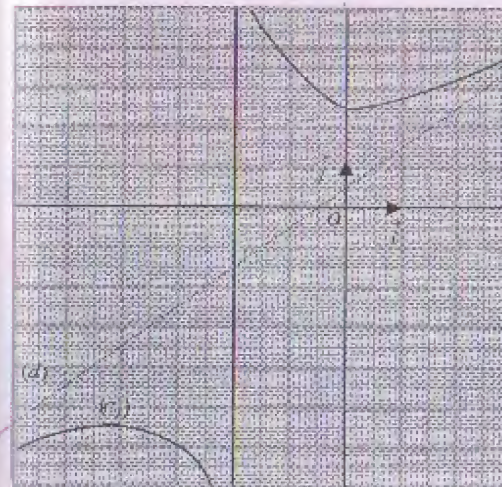
$$f(2(-2)-x) = \frac{2x^2+11x+22}{-2x-4}$$

$$-3-f(x) = \frac{-2x^2-11x-22}{2x+4}$$

ومنه نستنتج أن:

$$f(2(-2)-x) = -f(x) + 2(-1,5)$$

إذن H هي مركز تناظر لـ (C_f)



تطبيق 45

دراسة دالة ناطقة ورسم تمثيلها البياني

(1) دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

(أ) ادرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد على \mathbb{R} نرسم له α ثم

- أعط حصراته بتقريب 10^{-2}

(ج) عين إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(2) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1} + 1$

(أ) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$.

(ب) استنتج اتجاه تغير f على $]1, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات f على D_f .

(ج) بين أن $f(\alpha) = 3\alpha + 1$

(د) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

ثم ادرس الوضع النسبي لهذا المستقيم بالنسبة إلى (C_f) .

(هـ) أوجد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم

القارب المائل. ثم ارسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

الحل

(1) دراسة تغيرات g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 3x^2 - 3$

$g'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $g'(x) < 0$

ومنه g متناقصة تماما على $[-1, 1]$

- إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]1, +\infty[$.

و إليك جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		\circ	\circ	
تغيرات g	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$

(ب) بما أن $g'(x) \geq 0$

على المجال $]1, +\infty[$

و $0 \in [g(1), +\infty[$

فإن المعادلة $g(x) = 0$

لها حل وحيد α

ينتمي إلى المجال

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{x^2-1} \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad (د)$$

إذن $y = 2x+1$: (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
- الوضع النسبي لـ (d) بالنسبة إلى (C_f) .

$$f(x) - (2x+1) = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	+1	$+\infty$
$2x+3$	-	○	+	+	+
x^2-1	+	+	○	-	+
$f(x) - (2x+1)$	-	○	+	-	+

إذا كان x ينتمي إلى أحد المجالين:

$]-\infty, -\frac{3}{2}[$ و $]-1, 1[$

فإن (C_f) يقع تحت (d) - إذا كان

$$x \in]-\frac{3}{2}, -1[\cup]1, +\infty[$$

فإن (C_f) يقع فوق (d)

- (d) يقطع (C_f) في النقطة $A(-\frac{3}{2}, -2)$

(هـ) ميل المماس لـ (C_f)

عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$.

المماس يوازي (d) هذا معناه أن $f'(x_0) = 2$

$$x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 \quad f'(x_0) = 2$$

$$(1) \quad x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 \quad \dots \dots$$

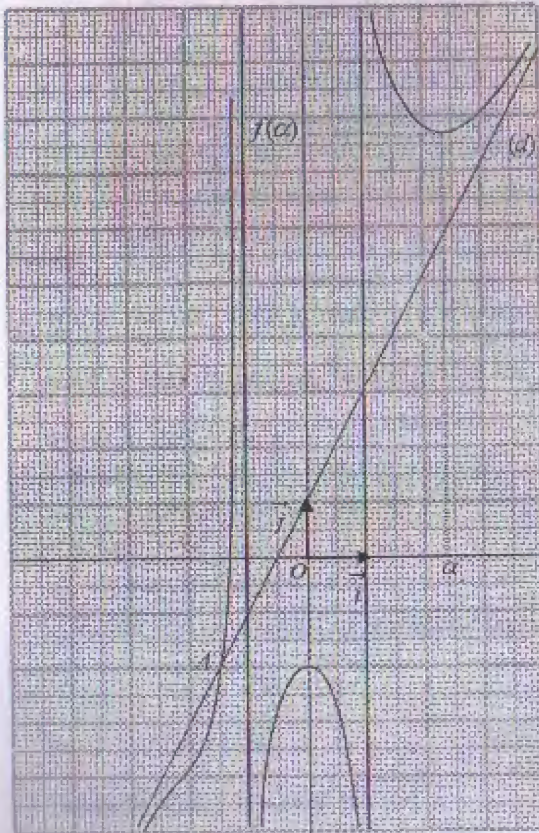
$$\Delta = 3^2 - 4(1)(1) = 5 \quad \text{منه}$$

المعادلة (1) ذات المجهول x_0 لها حلان هما،

$$x_0 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_0 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

إذن المنحني (C_f) له مماسان

عند النقطتين ذات الفاصلتين: x_0 و x_0' يوازيان (d) .



$]1, +\infty[$

بما أن $g'(x) > 0$ على $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ ليس لها حلول في المجال $]-\infty, -1[$.

بنفس الطريقة نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ ليس لها حلول في $]-1, 1[$.

إذن المعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد α في \mathbb{R}

نلاحظ أن $g(2) = -1$ و $g(3) = 15$ ومنه $\alpha \in]2, 3[$

باستعمال طريقة البيكتومي نجد $2,06 < \alpha < 2,12$

(ج) إذا كان $\alpha \in]-\infty, -1[$ فإن $g(x) < 0$

وإذا كان $\alpha \in]1, +\infty[$ فإن $g(x) > 0$

$$(2) \quad \text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } D_f \text{ ولدينا } f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} \times g(x)$$

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2} > 0$ وبالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$

(ب) - إذا كان $x \in]1, \alpha[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $]1, \alpha[$.

- إذا كان $x \in]\alpha, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $]\alpha, +\infty[$.

• اتجاه تغير f على $]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

- إذا كان $x \in]-\infty, -1[$ فإن $\frac{2x}{(x^2-1)^2} < 0$ و $g(x) < 0$ وبالتالي $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على $]-\infty, -1[$.

- إذا كان $x \in]0, 1[$ فإن $f'(x) < 0$ منه f متناقصة تماما على $]0, 1[$.

- إذا كان $x \in]-1, 0[$ فإن $f'(x) > 0$ منه f متزايدة تماما على $]-1, 0[$.

• جدول تغيرات f على D_f

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	○	+	○	-	+
تغيرات f	$-\infty \nearrow +\infty$		$f(0) \nearrow$	$-\infty \searrow$	$+\infty \searrow f(\alpha)$	$+\infty \nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$(ج) \quad f(\alpha) = \frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1} + 1 \quad \text{ولدينا} \quad g(\alpha) = 0$$

$$3 = \alpha^3 - 3\alpha \quad \text{يكافئ} \quad g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1} + 1 = \frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1} + 1 = 3\alpha \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1} \right) + 1 = 3\alpha + 1$$

تطبيق 26

عائلة المنحنيات

(1) لتكن f_0 دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ و (γ_0) منحنياها البياني في معلم متعامد و متجانس.
 (أ) ادرس تغيرات f_0 على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.
 (ب) عوّن معامل توجيّه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
 (2) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نعرف على \mathbb{R} الدالة $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$.
 (أ) ادرس تغيرات f_n ثم شكل جدول تغيراتها.
 (ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $f_n''(x)$ له نفس إشارة x ثم استنتج اتجاه تغير f_n .
 (ج) برهن أن المنحنيين (γ_1) ، (γ_2) للمالتين f_1 و f_2 على الترتيب يقبلان مستقيماً مقارباً أفقياً يطلب تعيينه.
 (د) برهن أن المستقيم ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لبيان الدالة f_3 .
 (3) (أ) برهن أن جميع منحنيات الدوال f_n تمر من نقطة ثابتة A .
 (ب) عبر بدلالة n عن معامل توجيّه المماس للمنحنيات (γ_n) عند النقطة A .
 (ج) ارسم المنحنيات (γ_0) ، (γ_1) ، (γ_2) ، (γ_3) .

الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ (1)

الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_0'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f_0'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_0'(x) < 0$ و f_0 متناقصة تماماً على $]0, +\infty[$.
 - إذا كان $x < 0$ فإن $f_0'(x) > 0$ و f_0 متزايدة تماماً على $]-\infty, 0[$.

(ب) معامل توجيّه المماس لـ (γ_0) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو $f_0'(1) = -\frac{1}{2}$.

(2) $D_{f_1} = \mathbb{R}$ ، $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (1)

الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_1'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f_1'(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=-1)$.

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $f_1'(x) > 0$ منه f_1 متزايدة تماماً على $[-1, 1]$.

- إذا كان $x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ فإن $f_1'(x) < 0$ و f_1 متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ ، $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $f_1'(x)$	-	0	+	-
تغيرات f_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(ب) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}[(n-2)x^2 + n]}{(x^2+1)^2}$

من أجل كل $n \geq 2$ و من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $(n-2)x^2 + n \geq 0$

و منه إشارة $f_n'(x)$ هي نفس إشارة x^{n-1} أي نفس إشارة x .

- إذا كان $x > 0$ فإن $f_n'(x) > 0$ و f_n متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$.

- إذا كان $x < 0$ فإن $f_n'(x) < 0$ و f_n متناقصة تماماً على المجال $]-\infty, 0[$.

(ج) بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ فإن (γ_1) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$.

بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$ فإن (γ_2) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ ، $(-\infty)$.

(د) $y = x$ مقارب مائل لـ (γ_3) إذا و فقط إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f_3(x) - x) = 0$

$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f_3(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$

لأن $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (γ_3) بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

(3) (أ) نفرض أن (γ_{n_1}) و (γ_{n_2}) يمران من نقطة ثابتة $A(x_0, y_0)$ حيث $n_1 \neq n_2$.

$A \in (\gamma_{n_1})$ هذا معناه أن

(1) $y_0 = \frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2}$

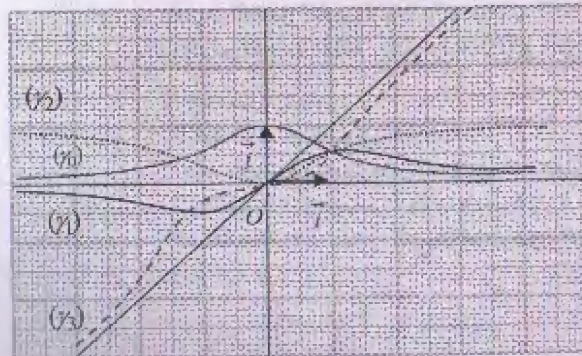
$A \in (\gamma_{n_2})$ هذا معناه أن

(2) $y_0 = \frac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

من (1) و (2) نجد

$\frac{x_0^{n_1}}{1+x_0^2} = \frac{x_0^{n_2}}{1+x_0^2}$

منه نستنتج $x_0^{n_1} = x_0^{n_2}$



المساويات التالية $h = x\sqrt{(h-1)^2 - 1}$ و $x^2 = \frac{h}{h-2}$ و $h = \frac{2x^2}{x^2-1}$

(ب) بتدوير المثلث ABC حول المستقيم (AB) نحصل على مخروط دوراني رأسه A وإذا علمت أن حجم المخروط الذي ارتفاعه h ومساحة قاعدته S

هو $V = \frac{h \times S}{3}$ ، عر عن $V(x)$ حجمه بدلالة x .

(ج) باستعمال النتائج المحصل عليها في السؤال (1) عين القيمة x التي من أجلها يكون حجم المخروط أصغرياً ثم عين من أجل القيمة المحصل عليها الزاوية BAC بتقريب 0.1 درجة.

الحل

(1) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1} = \frac{x^4-1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}$
 $= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} = x^2+1 + \frac{1}{x^2-1}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-1) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

(ج) من أجل كل $x > 1$ لدينا $f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$

منه نستنتج أن (P) منحنى مقارب لـ (y) بجوار $(+\infty)$.

إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{x^2-1} > 0$

ومنه المنحنى (y) يقع فوق (P) .

(د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2x^3(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = \sqrt{2}$.

إذا كان $x > \sqrt{2}$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[\sqrt{2}, +\infty[$

إذا كان $x > 1$ فإن $\sqrt{2} > x$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماماً على $]1, \sqrt{2}]$

$f(2) \approx 5,33$; $g(2) = 5$

x	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

وبما أن $n_1 \neq n_2$ فإن $x_0 = 1$ وعليه $A(1, \frac{1}{2})$

(ب) معامل توجيه المماس لـ (y_n) عند A هو $f'_n(1)$

$f'_n(1) = \frac{1[(n-2)+n]}{(1+1)^2} = \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_2(x)$	+	0	+
تغيرات f_2			$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_2(x)$	-	0	+
تغيرات f_2			1

تطبيق 2 المنحنى المقارب - حجم مخروط دوراني

(1) دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^4}{x^2-1}$ نسمي (y)

تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (طول الوحدة 4cm).

(أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ يكون $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}$

(ب) ادرس نهاية f عند 1 وعند $(+\infty)$.

(ج) (P) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $]1, +\infty[$ بـ $g(x) = x^2 + 1$

ما هي نهاية $[f(x) - g(x)]$ كما x يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

- ادرس الوضع النسبي لـ (y) بالنسبة إلى (P)

(د) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (P) و (y) في نفس المعلم السابق

(2) في الشكل المجاور

- المثلث ABC قائم في B

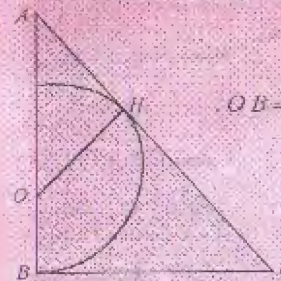
- نصف الدائرة ذات المركز O ونصف القطر $OB = 1$

- المستقيم (BC) مماس لنصف الدائرة في B

- المستقيم (AC) مماس لنصف الدائرة في H

نضع $BC = x$ و $AB = h$

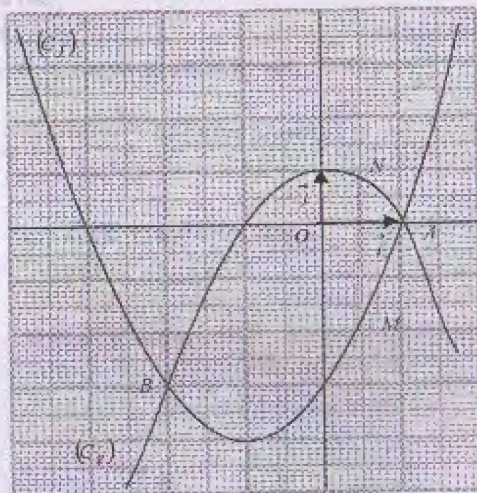
(أ) بين أن $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ ثم استنتج



المسافة الأعظمية و دوال كثيرة الحدود

تطبيق 28

ف و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 1 - x^2$
 (C_f) و (C_g) التحيان المثلان لـ f و g في معلم متعامد و متجانس
 (أ) ارسم (C_f) و (C_g) في نفس العلم.
 (ب) M و N نقطتان من (C_g) و (C_f) على الترتيب فاصلتيهما l
 مع $l \in [-2, 1]$ من أجل أي قيمة لـ l تكون M N أعظمية ؟ ثم احسبها.



التحيان (C_f) و (C_g)

عبارة عن قطعين مكافئين

(C_f) و (C_g)

يتقاطعان في النقطتين

$B(-2, -3)$ و $A(1, 0)$

$N(t, g(t))$ ، $M(t, f(t))$

$$MN = \sqrt{(t-t)^2 + (f(t)-g(t))^2}$$

$$= |f(t) - g(t)| = g(t) - f(t)$$

$$= -3t^2 - 2t + 4$$

نضع $h(t) = -3t^2 - 2t + 4$

الدالة h قابلة للاشتقاق

t	-2	$-\frac{1}{3}$	1
h'(t)	+	0	-
h(t)		$h(-\frac{1}{3})$	

على $[-2, 1]$ ولدينا $h(t) = -3t^2 - 2t + 4$

المسافة MN تكون أعظمية لـ

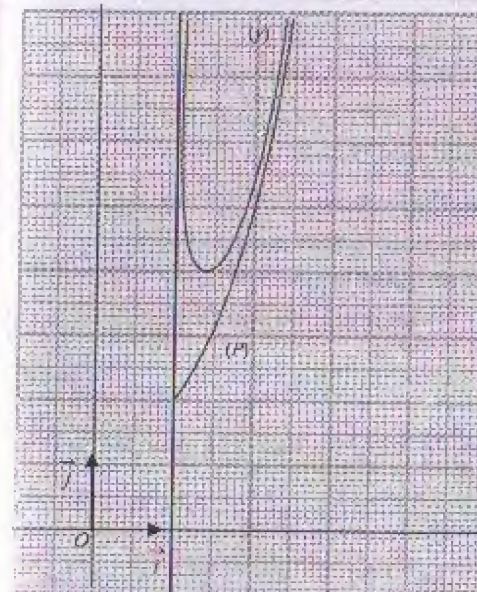
$x = -\frac{1}{3}$ وفي هذه الحالة

$$MN = h(-\frac{1}{3}) = \frac{13}{3}$$

المسافة الأعظمية و الدوال الجذرية

تطبيق 29

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = x \sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$ حيث p حقيقي موجب تماماً.



(2) (1) في المثلث القائم ABC لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} \dots (1)$$

وفي المثلث القائم AOH لدينا

$$\tan \hat{A} = \frac{OH}{AH} \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد $\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$

• استنتاج المساوات

بما أن H نقطة من نصف الدائرة

فإن $OH = 1$

ومنه المساواة (1) تصبح $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$

إذن $h = AH \times x$

في المثلث OAH لدينا

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

ومنه $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$

لكن $OA = AB - OB = h - 1$

إذن $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ بالتالي

بترتيب المساواة $h = \sqrt{(h-1)^2 - 1} \times x$ نجد $h^2 = [(h-1)^2 - 1] \times x^2$ ومنه

$$x^2 = \frac{h^2}{h^2 - 2h} = \frac{h}{h-2} \text{ أي } x^2 = \frac{h^2}{(h-1)^2 - 1}$$

- من المساواة $x^2 = \frac{h}{h-2}$ نجد $x^2 - 1 = \frac{h}{h-2} - 1 = \frac{h - (h-2)}{h-2} = \frac{2}{h-2}$ نجد $h(x^2 - 1) = 2x^2$ بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

(ب) $V(x) = \frac{h \times S}{3}$ و $S = \pi \times BC^2 = \pi x^2$

$$V(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \times \frac{\pi x^2}{3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{x^4}{x^2 - 1} \right)$$

(ج) نلاحظ أن $V(x) = \frac{2\pi}{3} f(x)$ أي $V(x) = 2f(x)$

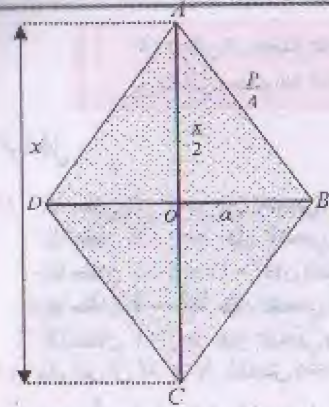
بما أن $l > 0$ فإن V و f لهما نفس اتجاه تغير و بما أن f لها قيمة صغرى عند

$x = \sqrt{2}$

فإن V لها قيمة صغرى عند $\sqrt{2}$ وفي هذه الحالة $V = \frac{2\pi}{3} f(\sqrt{2}) = \frac{8\pi}{3}$

$$\tan(\hat{BAC}) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ومنه $\hat{BAC} \approx 19,52^\circ$



$$\alpha^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{4}\right)^2 \text{ لدينا}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2} \text{ اي } \alpha = \sqrt{\frac{\rho^2}{16} - \frac{x^2}{4}} \text{ ومنه}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2} = \frac{1}{2} f(x) \text{ إذن}$$

(ب) يمان f و $\frac{1}{2}f$ لهما نفس اتجاه تغير فإن $\frac{1}{2}f$

$$\text{اي } A \text{ لها قيمة اعظمية عند } x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$$

إذن يوجد معين واحد من بين المعينات له مساحة

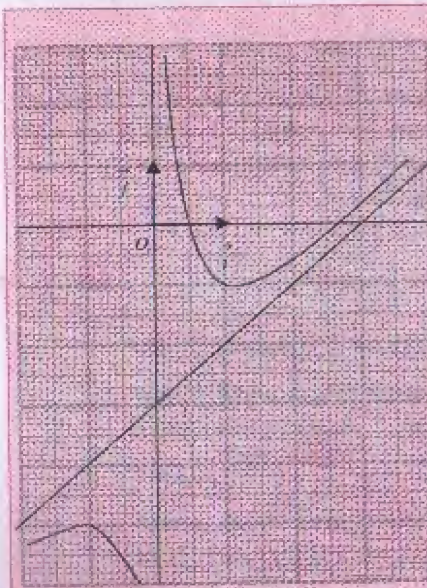
اعظمية هي $A\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$ و محيطه ρ .

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{8}} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{2\sqrt{2}} = \frac{\rho}{4\sqrt{2}} \text{ في هذه الحالة (اي لا } x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}} \text{ قيمة } \alpha \text{ هي}$$

بما أن $OA = OB$ فإن $ABCD$ مربع.

تطبيق 30

المحني ذو المعادلة الهندسية



$$y = x - 3 + \frac{1}{x} \text{ المنحني ذو المعادلة}$$

ممثل في الشكل المجاور.

d مستقيم معادلته $y = m$

حيث m عدد حقيقي معطى.

(1) باستعمال المنحني عين حسب

قيم m عدد نقاط تقاطع المنحني

مع المستقيم d

(2) لتكن N و M نقطتين

تقاطع المنحني مع المستقيم

d في حالة وجودهما.

تحقق أن فاصلتهما x_N و x_M

هما حلول للمعادلة

$$x^2 - (m+3)x + 1 = 0$$

(3) منتصف $[MN]$ تحقق

$$\text{ان } \left(\frac{m+3}{2}, m\right) \text{ إحداثيات } I$$

(1) تحقق أن f معرفة على $\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$

(ب) ادرس اتجاه تغير f ثم بين أن f لها قيمة اعظمية من أجل $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

(2) نهتم الآن بكل المعينات التي محيطها ρ و طول أحد قطريها x .

(أ) عبر عن مساحة هذه المعينات بدلالة ρ و x .

(ب) باستعمال السؤال الأول، عين من بين المعينات تلك التي لها مساحة اعظمية وما طبيعة هذا المعين؟

✓ الحل

(1) (أ) f معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4} - x^2 \geq 0$

$D_f = \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ ومنه $x \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ إذا وفقط إذا كان $\frac{\rho^2}{4} - x^2 \geq 0$

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right[$ ولدينا $f'(x) = \frac{-2\left(x^2 - \frac{\rho^2}{8}\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - x^2}}$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } \left(x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right) \text{ أو } \left(x = -\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $\left(x^2 - \frac{\rho^2}{8}\right)$.

x	$-\frac{\rho}{2}$	$-\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\rho}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\rho}{2}$
$f'(x)$	-	+	-	-
$f(x)$	0	$f\left(-\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$	$f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$	0

$$f(-\rho) = 0$$

$$f\left(-\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\rho^2}{8} \text{ و}$$

إذن من أجل كل x

من $\left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$ يكون

$$f(x) \leq f\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}}\right)$$

ومنه f لها قيمة اعظمية من أجل $x = \frac{\rho}{2\sqrt{2}}$

(2) (أ) نسمي A مساحة العين الفروض $A(x) = S_T \times 4$

حيث S_T مساحة المثلث OAB .

$$A = \alpha x \text{ ومنه } S_T = \frac{\alpha}{2} \times \frac{x}{2} = \frac{\alpha x}{4}$$

من $\left[\frac{4}{\sqrt{5}}, 2 \right]$ يكون $f(x) > 0$
- إليك جدول تغيرات f

x	0	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-	+
تغيرات f		$2\sqrt{5}$	4	$+\infty$

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

(4) يمان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 0$

فإن $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (y) بجوار $(+\infty)$.

(5) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[2, +\infty[$ فهي تقابل و بالتالي تقبل دالة

عكسية f^{-1} من $[4, +\infty[$ في $[2, +\infty[$

$$f^{-1}: [4, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

إيجاد عبارة $f^{-1}(x)$

من أجل كل $y \geq 4$ لدينا $y = 2x + \sqrt{x^2 - 4}$ و منه $3x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$

$$x_2 = \frac{2y - \sqrt{y^2 - 12}}{3}, \quad x_1 = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3}$$

و بعد حل هذه المعادلة نجد x_2 مرفوض لأنه لا ينتمي إلى $[2, +\infty[$.

$$f^{-1}(y) = \frac{2y + \sqrt{y^2 - 12}}{3} \quad \text{إذن}$$

تمارين و مسائل



باستعمال الدوال المشتقة للدوال المرجعية التالية عين معامل توجيه المماس لمنحنيات هذه الدوال عند النقطة ذات الفاصلة a المعطاة.

(1) $f(x) = x^2$ ، $a = -3$ (ب) ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $a = 1$ (ج) ، $K(x) = \sqrt{x}$ ، $a = 4$

1

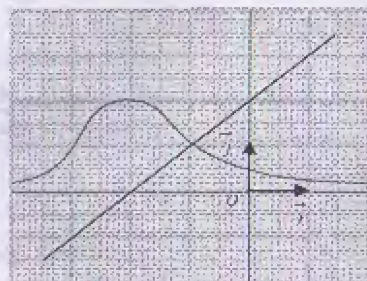
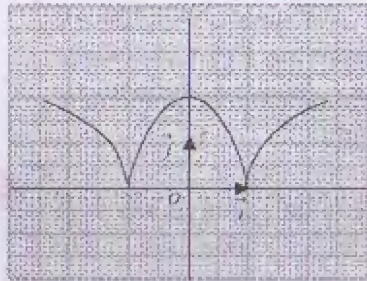
من أجل كل دالة من الدوال التالية ما هي الدالة القابلة للاشتقاق عند العدد المعطى؟

(1) $f(x) = x\sqrt{x}$ ، $a = 0$ (ب) ، $f(x) = \sqrt{x-3}$ ، $a = 3$

(ج) $f(x) = |x+3|x$ ، $a = -3$ (د) ، $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-2}$ ، $a = 0$

2

إليك التمثيلان البيانيان للدالتين f و g . بقراءة بيانية هل الدالتان قابلتان للاشتقاق عند القيمة -1؟ وفي حالة نعم عين العدد المشتق لكل من الدالتين f و g عند -1.



3

4

في كل حالة من الحالات التالية عين الدالة المشتقة للدالة f .

(1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ (ب) ، $f(x) = (2x-1)^3$ (ج) ، $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+3}$

(د) $f(x) = 3x - \frac{1}{2x+1}$ (هـ) ، $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$ (و) ، $f(x) = x^3\sqrt{x}$

(ن) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ (ي) $f(x) = 2x(x^2+1)^3$

5

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية على المجال I المعطى :

(أ) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x \sin x$ (ب) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \cos x \sin x$

(ج) $I = [0, 2\pi]$ ، $f(x) = \frac{2+\cos x}{2+\sin x}$ (د) $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $f(x) = \tan x$

(هـ) $I = [0, 2\pi]$ ، $f(x) = x + \sin x$

6

(ر) المنحني البياني للدالة f المعرفة من أجل كل $x \neq -1$ بـ $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

(1) أعط معادلة المماس للمنحني (ر) عند النقطة ذات الفاصلة $x=2$.

(2) هل يوجد مماس لـ (ر) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=2x$ ؟

(3) هل يوجد مماس لـ (ر) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{3}x$ ؟

7

ر و ج دالتان معرفتان على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$

(أ) برهن أن معامل توجبه المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو نفس معامل

توجيه المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0,25.

(ب) ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص هذين المماسين ؟

8

(1) f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^3 - 3x + 5$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) تحقق أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا محصورا بين -3 و -2 ثم أعط قيمة

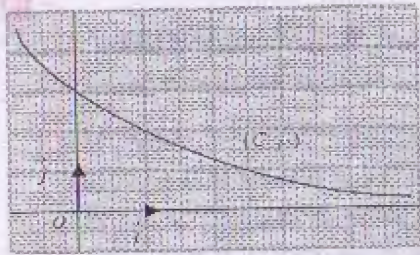
مقربة له بتقريب 10^{-1}

(2) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$

(أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) عين عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$ ثم من أجل كل حل عين حصرا له بسعة

10^{-1} (طول مجال الحصر هو 10^{-1})



f دالة معرفة على $[-1, 3]$
بحيث $f(1) = 3$ و التمثيل البياني
للدالة المشتقة
(كما في الشكل)

باستعمال خطوة قدرها 0,1
عين القيمة المقربة لـ $f(1,1)$.

9

f دالة قابلة للاشتقاق على $[-2, 2]$ و بحيث $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{9-x^2}$

(1) باستعمال طريقة أولر بخطوة قدرها 0,5 عين قيمة مقربة لـ $f(2)$

(2) ارسم المنحني البياني القرب للدالة f على المجال $[0, 2]$ ثم على المجال $[-2, 0]$

10

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$

(2) استنتج أنه من أجل كل حقيقي x يكون $(1+x^2)f''(x) + x f'(x) - f(x) = 0$

11

(1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة من أجل كل $x \neq 2$ بـ $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$

(2) استنتج الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال التالية :

$h : x \mapsto \frac{x^4+3}{x^2-2}$ ، $g : x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

$L : x \mapsto \frac{\sin^2 x + 3}{\sin x - 2}$ ، $K : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$

12

في كل حالة من الحالات التالية عين المجال الذي تكون فيه f قابلة للاشتقاق

ثم احسب $f'(x)$

(أ) $f(x) = \sin^3(2x)$ (ب) $f(x) = \cos^3(5x)$

(ج) $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$ (د) $f(x) = \frac{1}{4\cos^2 x - 1}$

14

14 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

(1) عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

(2) نرمز بـ g إلى الدالة المعرفة على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بـ $g(x) = f(\cos(x))$

بين أن g قابلة للاشتقاق على I ثم احسب $g'(x)$ من أجل كل x من I .

(3) نرمز بـ h إلى الدالة المعرفة على المجال $J =]4, +\infty[$ بـ $h(x) = f(\sqrt{x})$

بين أن h قابلة للاشتقاق على J ثم احسب $h'(x)$ من أجل كل x من J .

15

15 إذا كانت f دالة فردية وقابلة للاشتقاق على I ماذا يمكن القول عن شعبة f' .

إذا كانت f دالة زوجية وقابلة للاشتقاق على J ماذا يمكن القول عن شعبة f' .

16

16 باستعمال العدد المشتق اوجد نهاية f عند العدد a في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $a = -1$ ، $f(x) = \frac{(x+3)^2 - 1}{x+2}$ (ب) $a = -1$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$

(ج) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ (د) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$

(هـ) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ (و) $a = 1$ ، $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

(ن) $a = \pi$ ، $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x-\pi}$ (ي) $a = 0$ ، $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$

(.) $a = \frac{\pi}{2}$ ، $f(x) = \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ () $a = 1$ ، $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$

17

17 (1) a ، b عدنان حقيقيان، f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

(2) f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. هل يوجد a و b بحيث المماس

لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته $y = 4x + 3$ ؟

(3) a عدد حقيقي، g الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$

هل يوجد a بحيث الدالة g لها نهاية حدية عظمى من أجل $x = 1$ ؟

18

18 a ، b عدنان حقيقيان، f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$

(2) f تمثيلها البياني، هل يوجد a و b بحيث المماس لـ (γ) عند $A(1, 2)$ يوازي محور

الافاصل ؟

19

19 f دالة معرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

(1) ادرس تغيرات f على I .

(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α من المجال $]1, 2[$

(3) اعط قيمة مقربة لـ α بتقريب 10^{-2} بالزيادة.

20

20 f دالة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

(1) ادرس تغيرات f ثم ارسم تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد ومتجانس.

(2) a عدد حقيقي، أكتب معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(a, f(a))$

(ب) هل توجد مماسات لـ (γ) تمر من المبدأ O ؟

21

21 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$ و (γ) منحناها البياني في

معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث (لوحة هي 2cm).

(1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ب) بين أن (d) المستقيم ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (γ)

(2) احسب نهاية f عند -1 ماذا تستنتج بالنسبة إلى (γ) ؟

(3) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.

(4) بين أن النقطة $I(-1, -3)$ مركز تناظر لـ (γ) .

(5) ارسم التقييمات القارية ثم (γ) .

22

22 f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$ و (γ) منحناها

البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) احسب نهاية f عند أطراف مجال التعريف ثم ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

(2) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ) .

(3) عين بيانيا عدد حلول المعادلة ذات الجهد x التالية

$$x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0$$

23

f دالة معرفة على $]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$ بـ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

(2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

(3) هل f قابلة للاشتقاق عند -4 ؟ عند 0 ؟

(4) احسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]-\infty, -4] \cup [0, +\infty[$ و شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة و (γ) .

24

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2x + 4}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) برهن أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل $x \neq -2$ يكون:

$$f(x) = a(x-1)^2 + \frac{b}{x+2}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) نسمي (Γ) المنحني ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ و $x \neq -2$

P نقطة من (Γ) قاصبتها x و M نقطة من (γ) لها نفس الفاصلة.

أوجد للركبات السلمية للشعاع \vec{PM} ، ثم استنتج أن x يؤول إلى $(+\infty)$ أو إلى

$(-\infty)$ المسافة PM تؤول إلى الصفر، فسر هذه النتيجة هندسيا ثم ارسم (Γ) و (γ) .

25

(1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = -2x^3 - 6x^2 - 1$ ادرس تغيرات g ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]-2, +\infty[$

(2) لتكن f دالة معرفة على $]-2, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1-x^3}{x+2}$

(أ) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة على $]-2, +\infty[$

(ب) عين اتجاه تغير f على $]-2, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) ارسم (γ) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد و متجانس.

26

(1) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

(أ) ادرس تغيرات g ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α على \mathbb{R} ثم اعط قيمة مقربة له

بتقريب 10^{-2} بالزيادة. واستنتج إشارة $g(x)$

(2) f دالة معرفة على المجال $]1, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

(أ) بين أن $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]1, +\infty[$

(ب) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$.

(ج) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(د) ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f) .

27

(1) g دالة معرفة كما يلي $g(0) = 0$ و من أجل كل $x \neq 0$ ، $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(أ) بين أن g قابلة للاشتقاق عند 0 .

(ب) (γ) المنحني البياني لـ g في معلم متعامد و متجانس.

تحقق أن محور الفواصل مماس لـ (γ) عند النقطة O .

(2) (أ) برهن أن $g\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 0$ من أجل كل عدد صحيح k .

(ب) α عدد حقيقي موجب تماما، و صغير بالقدر الكافي.

يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ مع k عدد طبيعي من المجال $]0, \alpha[$ لذا ؟

(3) هل صحيح أن المماس لـ (γ) عند A لا يقطع (γ) في نقطة أخرى مختلفة عن A

بجوار A ؟

28

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$ و (γ) منحناها

البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

(ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1

(ج) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (2) ا) بين أن (d_1) و (d_2) حيث $d_1: y = -x - 1$ و $d_2: y = x + 1$ مقاريان لـ (γ) .
 ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى كل من (d_1) و (d_2) .
 ج) أوجد معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى هذا المماس على المجال $]-1, 1[$.
 د) ارسم المستقيمتان القاربتان والمماس و (γ) .

- ر دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x-1}}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس
 (1) ا) اعط مجموعة تعريف f .
 ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = -1$ من اليسار ماذا تستنتج؟
 ج) ادرس استمرار و قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 0$.
 (2) بين أن لـ (γ) مستقيمين مقاريين مائلين بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$ يطلب تعيينهما.
 (3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) و المستقيمتان القاربتان.

- لكن f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x) = \frac{x^2 + x + 3\alpha + 1}{x + \alpha}$ مع α عدد حقيقي، (γ_α) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
 (1) ادرس حسب قيم α تغيرات الدالة f_α .
 (2) بين أن المستقيم (d_α) ذا المعادلة $y = x + 1 - \alpha$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ_α) بالنسبة إلى (d_α) .
 (3) اثبت أن جميع المنحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
 (4) نضع $\alpha = 2$ ارسم (γ_2) .
 (5) بين أن النقطة $I(-2, -3)$ مركز تناظر لـ (γ_2) .

- (6) ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2 + (1-m)x + 7 - 2m = 0$.
 (7) استنتج من السؤال (6) عدد حلول المعادلة ذات المجهول θ :
 $\sin^2 \theta + (1-m)\sin \theta + 7 - 2m = 0$
 (8) لكن الدالة العددية g المعرفة بـ $g(x) = \frac{x^2 - |x| + 7}{|x| - 2}$.
 عي مجموعة تعريف g ثم بين أن g زوجية. و استنتج رسم (γ) بيان g .

- f_1 و f_2 دالتان معرفتان بـ $f_1(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 4}$ و $f_2(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 4}$

و (γ_1) و (γ_2) منحناهما البيانيان في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) على الترتيب.

- (1) ادرس استمرار و قابلية اشتقاق f_1 على D_{f_1}
 (2) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f_1(x) - f_1(-1)}{x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f_1(x) - f_1(1)}{x - 1}$ ماذا تستنتج؟
 (3) ادرس تغيرات الدالة f_1 .
 (4) بين أن لـ (γ_1) مستقيما مقاربا مائلا (d_1) معادلته $y = 4x$ بجوار $(-\infty)$ ثم ارسم (d_1) و (γ_1) .
 (5) بين أن f_1 تقابل من $[1, +\infty[$ في $[2, +\infty[$ ثم عي عبارة $f_1^{-1}(x)$ و ارسم (γ_1) بيانيها في نفس المعلم السابق دون دراسة تغيراتها.
 (6) ا) ليكن S_O التناظر المركزي الذي مركزه النقطة O عي عبارة S_O .
 ب) اثبت أن $S_O(\gamma_1) = (\gamma_2)$ ثم ارسم (γ_2) .
 (7) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي إحداثياتها تحقق المعادلة $y^2 - 4xy + 4 = 0$.
 ا) بين أن $(\Gamma) = (\gamma_1) \cup (\gamma_2)$.
 ب) ليكن الشعاع $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ، اكتب معادلة (Γ) في العلم (O, \vec{i}, \vec{v}) .

لكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2x - \sin x$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، (وحدة الطول هي 3cm).

- (1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .
 (2) برهن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $2x + 1 \leq f(x) \leq 2x - 1$ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$.
 (3) نرمز بـ (d_1) و (d_2) إلى المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 1$ عي نقط تقاطع (γ) مع (d_1) و (d_2) ثم جدد المماسات لـ (γ) عند هذه النقط.
 (4) ادرس شعبة f ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) .
 (5) قارن بين $f(x + 2\pi)$ و $f(x)$ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى (γ) ؟
 (6) ارسم بدقة للحنى (γ) على المجال $[0, \pi]$ ثم ارسم المماسات عند النقطتين ذواتي الفاصلتين 0 و π ثم (d_1) و (d_2) و استنتج رسم (γ) على المجال $[-3\pi, 3\pi]$.

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2 + 1$ إذا كان $x < 0$ و $f(x) = x^2 + x - \sin x + 1$ إذا كان $x \geq 0$

(1) بين أن f مستمرة عند 0. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

(2) نفرض في هذا السؤال أن $x \in [0, +\infty[$.

(أ) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f' على $[0, +\infty[$.

(ب) احسب $f'(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $[0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0, +\infty[$.

(1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث $g(0)=0$ و $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(أ) باستعمال طريقة أولر بخطوة 0,5 اعط قيمة مقربة لـ $g(1)$ و $g(0,5)$

(ب) باستعمال طريقة أولر بخطوة 0,2 ارسم (γ) المنحنى البياني القريب لـ g على $[0, 1]$.

(ج) طبق الطريقة السابقة بخطوة 0,1 ثم بخطوة 0,01 و باستعمال الآلة الحاسبة

البيانية أو المجدول ارسم منحنى تقريبا للدالة g .

- اعط قيمة مقربة لـ $g(1)$.

(2) باستعمال اتجاه تغير الدالتين برهن أنه من أجل كل x من $[0, +\infty[$ يكون

$$0 \leq g(x) \leq x$$

(3) لتكن f دالة الظل (\tan)

(أ) برهن أنه من أجل كل x من $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ يكون $g'(f(x)) = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

(ب) استنتج مشتق الدالة $g \circ f$ ثم احسب $g \circ f(0)$

(ج) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من أجل كل x من $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ يكون

$$(g \circ f)(x) - x = 0 \text{ و استنتج أيضا القيمة المضبوطة لـ } g(1)$$

f_n دالة عددية معرفة على $]-\infty, 1[$ بـ $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$ مع n عدد طبيعي غير

معدوم و نرمز بـ (γ_n) إلى التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

(1) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند 1 ماذا تستنتج ؟

(2) عين حسب قيم n نهاية f_n عند $(-\infty)$

(3) ادرس تغيرات f_n (ميز الحالتين n فردي و n زوجي)

(ب) في كل حالة من هاتين الحالتين شكل جدول تغيرات f_n .

(4) ارسم (γ_1) و (γ_2) (الوحدة هي 4cm)

(5) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، عين حسب قيم x الوضع النسبي لـ (γ_n) و

(γ_{n+1})

لتكن الدالة العددية f_α المعرفة بـ $f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x - \alpha^2}{\cos^2 x - \alpha^2}$ و α وسيط حقيقي موجب

و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α

(1) عين حسب قيم α مجموعة تعريف الدالة f_α .

(2) إذا كان $\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ بين أن جميع النحنيات (γ_α) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

(3) ادرس تغيرات الدوال $f_0, f_1, f_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ثم ارسم $(\gamma_0), (\gamma_1), (\gamma_{\frac{\sqrt{2}}{2}})$

f_α دالة معرفة بـ $f_\alpha(x) = \alpha x + 2\sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ، (γ_α) تمثيلها البياني

في معلم متعامد و متجانس.

(1) أوجد مجموعة تعريف الدالة f_α ثم ضعها على شكل مجالات.

(2) هل المنحنى (γ_α) له مستقيمات مقاربة مائلة ؟

(3) (أ) ادرس قابلية اشتقاق f_α عند $\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\alpha}$ ماذا تستنتج ؟

(ب) نضع $\alpha = \frac{1}{3}$ ، ارسم $(\gamma_{\frac{1}{3}})$

(ج) برهن أن $f_{\frac{1}{3}}$ تقبل دالة عكسية $f_{\frac{1}{3}}^{-1}$ يطلب رسم تمثيلها البياني في نفس العلم.

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = -\frac{1}{3}x - 2\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}$

أثبت أن (C_g) و $(\gamma_{\frac{1}{3}})$ متناظران بالنسبة إلى (xx') ثم ارسم (C_g) .

f دالة معرفة بـ $f(x) = |x-1| + \frac{2}{x+1}$ و (γ) منحنىها البياني.

(1) ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق f عند $x=1$

(2) بين أن $(d_1): y = x-1$ ، $(d_2): y = -x+1$ مستقيمان مقاربان لـ (γ) بجوار

$(+\infty)$ و $(-\infty)$ على الترتيب.

(3) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها. و ارسم (γ) و (d_1) و (d_2)

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = |x|-1 + \frac{2}{1+|x|}$

عين مجموعة تعريف الدالة g ثم بين أن g زوجية و ارسم (γ') بيان g اشتقاقا.

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{2 + \sin x}$ و (γ) منحنىها البياني في معلم متعامد

ومتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ (طول الوحدة 2cm).

(1) ا) عين مجموعة تعريف f .

ب) برهن أن المنحني (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ كمحور تناظر له.

ج) أثبت أن f دورية و دورها 2π .

د) اشرح لماذا يمكن اختصار دراسة f على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(2) ا) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$f'(x) = \cos x \left[\frac{3}{(2 + \sin x)^2} - 1 \right]$$

ب) برهن أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α من $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ثم احسب $f(\alpha)$.

ج) شكل جدول تغيرات f على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

د) احسب $f(0)$ ، $f'(\frac{\pi}{6})$ ، $f(\frac{\pi}{6})$ ، $f(\frac{\pi}{3})$ ثم اعط قيمة تقريبية لـ α .

(3) ا) ارسم (γ) على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

ب) ارسم (γ_1) حيث (γ_1) هي مجموعة النقط $M(x, y)$ من (γ) و $\frac{\pi}{2} \geq x \geq 0$.

في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة 10cm).

(4) لتكن g دالة معرفة بـ $g(x) = f(x) - x$

ا) برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $0, \frac{\pi}{2}$ بحيث $g(x_0) = 0$

ب) حدد بيانيا حل x_0 انطلاقا من (γ_1)

ج) تحقق أن x_0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ على \mathbb{R} .

(5) لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ $U_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ ولتكن النقطتان } A_n(U_n, U_{n+1}) \text{ و } B_n(U_{n+1}, U_{n+2})$$

ا) على أي منحنى نجد النقطتين A_n و B_n ؟

ب) أنشئ النقط $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ في نفس العلم و ذلك باستعمال السؤال (1) و بدون حساب ترتيب هذه النقط ما عدا النقطة A_0 .

ج) مثل الأعداد الحقيقية U_0, U_1, U_2, U_3 على المحور (\vec{o}, \vec{i}) .

د) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \in [0, \frac{1}{2}]$

هـ) برهن أن من أجل كل x من $[0, \frac{\pi}{2}]$ يكون $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ ثم بين أنه من

أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{2}{3} |U_n - x_0|$

و) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :

$$|U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0| \text{ ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المتتالية } (U_n) \text{ ؟}$$

في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر الدائرة (C) ذات المعادلة $x^2 + y^2 = 1$

و النقطة I ذات الإحداثي $(1, 0)$ و M و N نقطتان من (C) بحيث

$(MN) \perp (OI)$ و H نقطة تقاطع المستقيمان (OI) و (MN) ، نضع $\vec{OH} = x \vec{i}$.

1) احسب مساحة المثلث MNI بدلالة x .

2) الدالة المعرفة على $[-1, 1]$

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

ا) أوجد قيم f عند أطراف مجال التعريف.

ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند -1 و 1

ثم استنتج معادلات المماسات للمنحني (C_f)

الممثل للدالة f عند النقطتين

نواتا الفاصلتين -1 و 1 .

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

د) ارسم (C_f) في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة 10cm)

3) من أجل أي قيمة لـ x مساحة المثلث MNI أعظمية ؟ ما هي هذه المساحة ؟

4) من أجل أي قيمة لـ x مختلفة عند الصفر تكون مساحة المثلث MNI تساوي 1 (يعطى x بتقريب 0,01 بالزيادة).

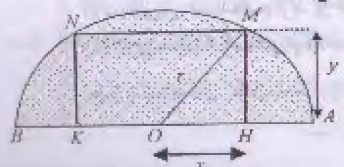
لتكن (C) نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها r ، مستطيل $KHMN$ مرسوم داخل نصف الدائرة كما هو موضح في الشكل.

1) عين قيمة x بحيث المستطيل له

مساحة أعظمية، ما هي عندئذ قيمة y ؟

2) نسمي الآن θ قياس الزاوية \widehat{AOM}

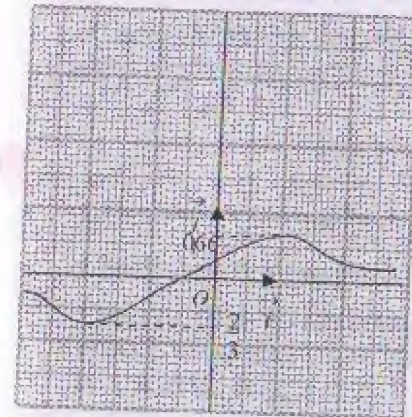
- عبر بدلالة θ عن مساحة المستطيل $KHMN$



- من أجل أي قيمة لـ θ تكون مساحة المستطيل اعظمية ؟

42

لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} وقابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} والدالة f' منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور.
من أجل كل معلومة من المعلومات التالية ما هي الصحيحة والخاطئة منها ؟



(1) f تقبل قيمة صغرى من أجل $x = \frac{-1}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = 0$

(3) f متناقصة تماما على $[1, +\infty[$

(4) إذا كان $f(-2) = 1$

فإنه من أجل كل $x \in [-2, 1]$ يكون $f(x) \geq 1$

(5) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة

ذات الفاصلة -2 هي $y = \frac{-2}{3}$

43

(1) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

(أ) ادرس اتجاه تغير g على \mathbb{R} .

(ب) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم اعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-1} بالزيادة. وعين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(2) لتكن f دالة معرفة على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x})$

(أ) برهن أن من أجل كل $x \neq 0$ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير f واحسب نهاية f عند $-\infty, +\infty, 0$.

(ج) برهن أن $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) نسمي (r) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(طول الوحدة 3cm) ولتكن I نقطة من (r) فاصلتها -1 و J نقطة من (r) فاصلتها 1.

(أ) تحقق أن المستقيم (IJ) مماس لـ (r) عند J .

(ب) عين معادلة للمماس (r) للمنحني (r) عند I ثم ادرس وضعية (r) بالنسبة لهذا المماس.

(ج) باستعمال كل النتائج السابقة ارسم (r) (تاخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة مقربة لـ α).

4

الدرس

الدالة الأسية

1. دراسة المعادلة التفاضلية $f' = f$ مع $f(0) = 1$

مثال -

تقبل أنه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل x من

\mathbb{R} لدينا $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$.

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة f باستعمال مجبول (طريقة أولر) على $[-1, 1]$.

(1) باستعمال التقريب التالفي $f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$

(أ) عين قيمة تقريبية لـ $f(0.5)$ و $f(1)$ بخطوة $h = 0.5$

(ب) عين قيمة تقريبية لـ $f(-0.5)$ و $f(-1)$ بخطوة $h = -0.5$

(2) على المجال $[0, 1]$ نختار خطوة $h = 0.1$ ونشكل متتالية النقاط

$M_n(x_n, y_n)$ حيث $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ و $y_n = f(x_n)$

(أ) بين أن المتتالية (x_n) حسابية و (y_n) متتالية هندسية ثم اكتب x_n و y_n بدلالة n .

(ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n = f(x_n)$ مع $10 \geq n \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$.

(ج) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[0, 1]$ في معلم متعامد

ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (طول الوحدة 0,1)

(3) على المجال $[-1, 0]$ نختار خطوة $h = -0,1$ ونشكل متتالية النقاط

$y_0 = 1$ و $x_0 = 0$ و $y_n = f(x_n)$ حيث $M_n(x_n, y_n)$

(أ) اكتب x_n و $y_n = f(x_n)$ بدلالة n .

(ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n = f(x_n)$ حيث $10 \geq n \geq 0$

(ج) ارسم للحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[-1, 0]$ في نفس العلم السابق.

✓ الحل

(1) بما أن $f'(a) = f(a)$ فإن $f(a+h) \approx (1+h) \times f(a)$

$$f(0,5) = f(0+0,5) = (1+0,5)f(0) = 1,5 \times 1 = 1,5$$

$$f(1) = f(0,5+0,5) = (1+0,5)f(0,5) = 1,5 \times 1,5 = 2,25$$

$$f(-0,5) = f(0-0,5) = (1-0,5)f(0) = 0,5$$

$$f(-1) = f(-0,5-0,5) = (1-0,5)f(-0,5) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

(2) (أ) النقطة M_0 إحداثياتها $(0, 1)$ والنقطة M_1 إحداثياتها (x_1, y_1)

$$\text{حيث } x_1 = x_0 + h \text{ و } y_1 = (1+h)y_0$$

النقطة M_2 إحداثياتها (x_2, y_2) حيث $x_2 = x_1 + h$ و $y_2 = (1+h)y_1$ وهكذا دواليك

النقطة M_n إحداثياتها تحقق $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = (1+h)y_{n-1}$ ومنه نستنتج أن (x_n)

متتالية حسابية أساسها h و (y_n) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$.

بما أن $h = 0,1$ فإن $x_n = x_0 + nh = 0,1n$ و $y_n = y_0 \times (1+h)^n$ أي $y_n = (1,1)^n$

(ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,94	2,14	2,35	2,59

(ج) التحنن التقريبي للدالة

f مشكل من قطع

$$[M_k, M_{k+1}]$$

حيث $n-1 \geq k \geq 0$

$$M_k(0,1k, (1,1)^k)$$

(أ) للتتالية (x_n)

معرفة كما يلي

$$x_n = x_{n-1} + h$$

أي $x_n = x_{n-1} - 0,1$ إذن $x_n = -0,1n$

التتالية (y_n) معرفة كمايلي $y_n = (1-0,1)y_{n-1}$ أي $y_n = 0,9y_{n-1}$

وبالتالي (y_n) متتالية هندسية أساسها $0,9$ وعليه $y_n = 1 \times (0,9)^n$

الدالة الأسية

(ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
y_n	1	0,9	0,81	0,72	0,65	0,59	0,53	0,47	0,43	0,38	0,34

خاصية

إذا وجدت دالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ فإنها لا تعتمد على \mathbb{R} .

الإثبات

لتكن الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = f(x) \times f(-x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ودالتها المشتقة H معرفة بـ

$$H(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x)$$

وبما أنه $f'(x) = f(x)$ فإن عبارة $H(x)$ تصبح $H(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$

إذن h دالة ثابتة.

بما أنه $f(0) = 1$ فإن $h(0) = f(0)f(0) = 1$ وبالتالي من أجل كل x من \mathbb{R}

$$h(x) = 1$$

بما أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x)f(-x) = 1$ فإن $f(x)$ غير معدومة على \mathbb{R} .

مبرهنة

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$.

الإثبات

وجود الدالة f يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية f .

لتكن g دالة أخرى قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و بحيث $g' = g$ و $g(0) = 1$.

$$\text{الدالة } \frac{g}{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ ولدينا } \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0$$

إذن الدالة $\frac{g}{f}$ ثابتة من أجل كل x من \mathbb{R} وبما أن $\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ فإن من أجل

كل x من \mathbb{R} يكون $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ أي $g(x) = f(x)$ وهذا يدل على أن f وحيدة.

2. تعريف الدالة الأسية

نسمي دالة أسية، الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على \mathbb{R} بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$

ونرمز لها بـ \exp و نكتب $f(x) = \exp(x)$.

3. خواص الدالة الأسية

- (1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة هي نفسها أي $\exp'(x) = \exp(x)$
- (2) الدالة الأسية مستمرة على \mathbb{R} و $\exp(0) = 1$
- (3) مهما يكن العددين الحقيقيان a و b لدينا $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- (4) مهما يكن العددين الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n لدينا $\exp(2a) = (\exp(a))^2$ ، $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ ، $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- (5) مهما يكن العدد الحقيقي a يكون $\exp(a) > 0$ و $\exp(na) = (\exp(a))^n$

الإثبات

نحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف
 (3) لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = f(a+b-x)f(x)$ حيث f الدالة الأسية.
 g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = -f(a+b-x)f'(x) + f(a+b-x)f'(x) = 0$
 إذن g دالة ثابتة.
 بما أن $g(0) = f(a+b)f(0) = f(a+b)$ و $g(b) = f(a)f(b)$ فإن $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ أي $f(a+b) = f(a) \times f(b)$
 (4) $\exp(2a) = \exp(a+a) = \exp(a) \times \exp(a) = (\exp(a))^2$
 لدينا $\exp(-a+a) = 1$ ولدينا من جهة أخرى $\exp(-a+a) = \exp(-a) \times \exp(a)$
 إذن $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ وبالتالي $1 = \exp(-a) \times \exp(a)$

$$\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

- نتقبل أن $\exp(na) = (\exp(a))^n$ (نرهن على هذه الخاصية بالتراجع من أجل n طبيعي).
 و من أجل n عدد صحيح سالب فإن $-n$ عدد طبيعي ولدينا
 $\exp(na) = (\exp(-na)) = \frac{1}{\exp(-na)} = \frac{1}{(\exp(a))^{-n}} = (\exp(a))^n$

(5) بكتابة $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ فيكون $\exp(a) = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \times \exp\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$
 ومنه نستنتج $\exp(a) > 0$.

ملاحظة

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، غير معدومة، حيث $f'(0) = 1$ و $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

الأمثلة

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:
 (1) قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، (غير معدومة)، $(f'(0) = 1)$ ، $(f(a+b) = f(a) \times f(b))$.
 لتكن f دالة أخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من أجل a عدد حقيقي
 وعلى من أجل كل عدد حقيقي x كيفي $f(x+a) = f(x) \times f(a)$.
 الدالة $x \mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها مركب دالتين، والدالة
 $f(x) \mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .
 إذن $f'(x+a) = f'(x) \times f(a)$ و بما أن $f'(0) = 1$ فإن $f'(a) = f'(0) \times f(a) = f(a)$ من أجل كل a
 من الدالة f حل للمعادلة $f' = f$.
 بالإضافة إلى ذلك $f(a+0) = f(a) \times f(0)$ أي $f(a) = f(a) \times f(0)$ لأن $f(0) = 1$ غير معدوم إذن
 و عليه f هي حل للمعادلة $f' = f$ و $f(0) = 1$ وهذا يعني أن f هي الدالة الأسية.

تمرين تدريبي 1

f, g, h دوال معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \exp(x) + 2x$ ، $g(x) = \exp(x-1)$ ، $h(x) = \exp(-2x)$
 و $h(x) = \exp(-2x)$
 (أ) عين اتجاه تغير كل دالة.
 (ب) أوجد علاقة بين g و g' و h و h' .

الحل

(أ) - الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما $x \mapsto \exp x$ و $x \mapsto 2x$ ولدينا $f'(x) = \exp x + 2$.
 من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $\exp x > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ أي أن الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .
 • $g(x) = \exp(x) \times \exp(-1)$
 الدالة g هي جداء الدالة \exp بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)$ ومنه $g'(x) = \exp'(x) \times \exp(-1) = \exp(x) \times \exp(-1) = \exp(x-1)$ و $g'(x) > 0$ إذن g متزايدة تماماً على \mathbb{R} .
 • $h(x) = (\exp(-x))^2 = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$ حيث $u(x) = \exp(x)$ إذن الدالة h من الشكل $\left(\frac{1}{u}\right)^2$.
 $h'(x) = \frac{-2 \exp(x)}{(\exp(x))^3} = \frac{-2}{(\exp(x))^2} = -2 \exp(-2x)$
 لكن $\exp(-2x) > 0$ إذن $h'(x) < 0$ ومنه نستنتج أن h متناقصة تماماً على \mathbb{R} .
 (ب) $g'(x) = \exp(x-1) = g(x)$ و $h'(x) = -2 \exp(-2x) = -2h(x)$

تمرين تدريبي 2

(1) بسط العبارات التالية :

$$C = \frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)} , B = \exp(3-2x) \times \exp(5x-7) , A = (\exp(x))^3$$

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\frac{\exp x}{\exp x - x} = \frac{1}{1 - x \exp(-x)}$

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}$$

✓ الحل

$$A = (\exp(x))^3 = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(2x) \times \exp(x) = \exp(3x) \quad (1)$$

$$B = \exp(3-2x) \times \exp(5x-7) = \exp(3-2x+5x-7) = \exp(-4+3x)$$

$$C = \frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)} = \frac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}} = \exp(3x-1) \times \exp(3x) = \exp(3x-1+3x) = \exp(6x-1)$$

$$\frac{\exp(x)}{\exp(x)-x} = \frac{\exp(x)}{\exp(x)[1-x \exp(-x)]} = \frac{1}{1-x \exp(-x)} \quad (ب)$$

$$\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\exp(x) \left[1 - \frac{\exp(-x)}{\exp(x)} \right]}{\exp(x) \left[1 + \frac{\exp(-x)}{\exp(x)} \right]} = \frac{1 - (\exp(-x))^2}{1 + (\exp(-x))^2} = \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}$$

4. الترميز e^x

صورة الواحد بالدالة الأسية نرسم له ب e أي $\exp(1) = e$.

العدد e هو عدد حقيقي والقيمة التقريبية له هي 2,71828

الخواص المبرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$ من أجل كل عدد صحيح n .

نرمز ب e^x إلى صورة العدد الحقيقي x بالدالة الأسية و نكتب $\exp(x) = e^x$

ملاحظة

العدد e عدد غير ناطق

الدالة الأسية

خواص

خواص الدالة الأسية المبرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

(1) الدالة $e^x : x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة هي نفسها

(2) $e^0 = 1$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون $e^x > 0$.

(3) مهما يكن العددين الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b , e^{-a} = \frac{1}{e^a} , e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} , (e^a)^n = e^{an}$$

(4) من أجل كل الأعداد الحقيقية a_1, a_2, \dots, a_p حيث p عدد طبيعي لدينا

$$e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_p} = e^{a_1 + a_2 + \dots + a_p}$$

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية :

$$A = e^{-3} \times (e^2)^8 , B = (e^{-x}) \times (e^3)^3$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x} , D = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$$

✓ الحل

$$A = e^{-3} \times e^8 = e^{-3+8} = e^5$$

$$B = e^{-x} \times (e^3)^3 = e^{-x} \times e^{3x} = e^{-x+3x} = e^{2x}$$

$$C = e^{2x} \times e^{-2x} = e^{2x-2x} = e^0 = 1$$

$$D = \frac{e^{-x}}{e^x + 1} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x e^{-x}}{e^{2x} + e^x} - \frac{e^{-2x} e^{2x}}{e^{2x} + e^x}$$

$$= \frac{e^0}{e^{2x} + e^x} - \frac{e^0}{e^{2x} + e^x} = \frac{1}{e^{2x} + e^x} - \frac{1}{e^{2x} + e^x} = 0$$

5. دراسة الدالة الأسية

1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

(1) الدالة الأسية متزايدة تماماً على \mathbb{R}

(2) إذا كان $x > 0$ فإن $e^x > 1$ وإذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ و من أجل } h \text{ قريب من الصفر } e^h \approx 1 + h$$

الإنذارات

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $\exp'(x) = \exp(x)$ و $\exp(x) > 0$ إذن الدالة الأسية متزايدة على \mathbb{R}

(2) بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال $[0, +\infty[$ و $\exp(0) = 1$ فإنه من أجل كل $x > 0$ يكون $\exp(x) > 1$
- بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على $]-\infty, 0]$ و $\exp(0) = 1$ فإنه من أجل كل $x < 0$ يكون $\exp(x) < 1$

(3) لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^x - x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = e^x - 1$ و $f'(0) = 0$
- على المجال $]-\infty, 0[$ لدينا $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0]$
- على المجال $[0, +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$
و بما أن $f(0) = 1$ فإن الدالة f تقيبل قيمة حدية صغرى تساوي 1.

إذن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) \geq 1$
ومنه نستنتج أن $f'(x) > 0$ على \mathbb{R} وهذا يعني أن $x > e^x$.
وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (حسب نظرية الحصر)
- نضع $-X = x$ وبالتالي x يؤول إلى $(-\infty)$ فإن X يؤول إلى $(+\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

(4) - الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1

$$\text{ومنه نستنتج بالتعريف أن } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

- من النهاية السابقة نستنتج أن في جوار الصفر $e^h = 1 + h + \phi(h)$ حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0$
إذن $e^h \approx 1 + h$ بجوار الصفر.

تمرين تدريبي

لتكن f و g دالتين معرفتين بـ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و $g(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

$$\text{احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{ثم احسب } \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

تمرين تدريبي

(1) باستعمال التقريب التالي لـ e^x برهن أنه عندما يكون العدد الطبيعي n كبيراً

$$\text{بالقدر الكافي يكون } e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(2) لتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ احسب بقريب } 10^{-10} \text{ الحدود } U_{100} \text{ و } U_{1000} \text{ ثم قارنها مع } e$$

الحل

(1) بجوار الصفر لدينا $e^h \approx 1 + h$

$$\text{و بوضع } h = \frac{1}{n} \text{ مع } n \text{ كبير بالقدر الكافي نجد } e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{و برفع الطرفين إلى القوة } n \text{ نجد } \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ أي } e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$U_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048138294$$

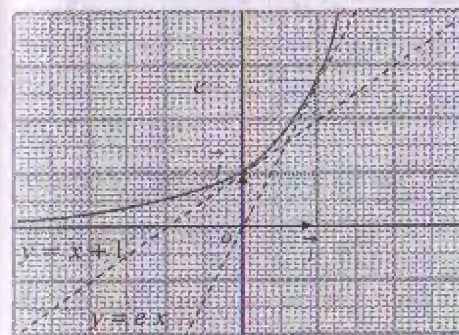
$$U_{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169239325$$

نلاحظ أن U_{100} و U_{1000} قيم مقربة إلى 10^{-10} للعدد

و كلما كان n كبيراً جذا كلما اقتربنا من العدد e

$$\text{و بالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e$$

2.5 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
$\exp(x)$			$+\infty$

- المنحنى الممثل للدالة \exp يقبل الاستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب له بجوار $(-\infty)$
- المماس لمنحنى الدالة \exp عند 1 و 0 معادلتاهما على الترتيب $y=x+1$ و $y=ex$
- بما أن $e^x > x$ من أجل كل x فإن المنحنى الممثل للدالة \exp يقع فوق للاستقيم ذي المعادلة $y=x$

3.5 الوضع النسبي لبيان الدالة \exp و مماساته

نسمي (γ) المنحنى البياني للدالة \exp في معلم متعامد ومتجانس. وليكن a عدد حقيقي و

لتكن $M(a, e^a)$ نقطة من (γ) .

معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) عند M هي $y = e^a + e^a(x-a)$.

لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T) ندرس إشارة المقدار $e^x - [e^a + e^a(x-a)]$.

نضع $f(x) = e^x - [e^a + e^a(x-a)]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما:

e^x و $x \mapsto -[e^a + e^a(x-a)]$ ولدينا $f'(x) = e^x - e^a$

بما أن الدالة \exp متزايدة تماماً فإن

- إذا كان $x > a$ يكون $e^x > e^a$ و عليه $f'(x) > 0$

- إذا كان $x < a$ يكون $e^x < e^a$ و عليه $f'(x) < 0$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$			

$f(a)=0$

- من جدول تغيرات f نلاحظ أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x) \geq 0$ وهذا يعني أن المنحنى للدالة \exp يقع فوق المماس (T) و يمسّه في النقطة الوحيدة $M(a, e^a)$

4.5 نهايات شهيرة

مرهنة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

الإنبات

لتكن f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

f و f' قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = e^x - x$ و $f''(x) = e^x - 1$

من أجل كل x من $[0, +\infty[$ لدينا $f''(x) \geq 0$ و منه الدالة f'' متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

بما أن $f''(0) = 1$ فإن $f''(x) > 0$ و عليه فإن الدالة f' متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$

وبما أن $f'(0) = 1$ فإن $f'(x) > 0$

$f(x) > 0$ يكافئ $e^x > \frac{x^2}{2}$ بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماماً x نجد $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

* بوضع $X = -x$ يكون $X e^X = -X e^{-X} = \frac{-X}{e^X} = \frac{-1}{(\frac{e^X}{X})}$

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\frac{e^X}{X})} = 0$$

ملاحظة

من أجل قيم كبرى لـ x ، فالعددان x و e^x يأخذان قيمة كبرى جداً و بما أن

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ فإن e^x أكبر بكثير عن x نقول أن الدالة الأسية تتفوق عن

الدالة $x \mapsto x$

تمرين تدريبي 1

1) f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^x - 2x + 1$ و $g(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 2}$

احسب نهايات f و g عند $+\infty$ و $-\infty$

2) h و k دالتان معرفتان كما يلي $h(x) = \frac{x+2}{3e^x+1}$ و $k(x) = \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

احسب نهاية h عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) احسب نهاية k عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ و 1

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(3 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 2x + 1) = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x}\right) = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{e^x \left(3 - \frac{1}{e^x}\right)} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{3e^x-1} = +\infty \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x-1) = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{x} \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1}-1) \times \frac{1}{x-1} = 0 \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1}-1) = -1$$

$$X = x-1 \quad \text{حيث} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^X-1}{X} = 1$$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^x - x - 2$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم

متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حلان في \mathbb{R} . ثم ارسم (γ) .

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$$

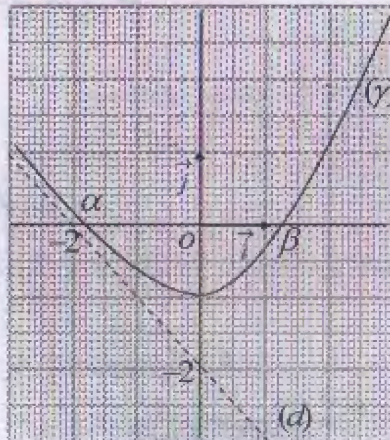
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x > 0$ فإن $e^x > 1$ وبالتالي $f'(x) > 0$ أي f متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

- إذا كان $x < 0$ فإن $e^x < 1$ وبالتالي $f'(x) < 0$ أي f متناقصة تماماً على $]-\infty, 0]$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات f	$+\infty$	-1	$+\infty$

- بما أن $f' < 0$ على المجال $]-\infty, 0]$.

و $[0, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = 0$

لها حل وحيد α من $]-\infty, 0]$.

- بما أن $f' > 0$ على المجال $]0, +\infty[$.

و $[0, +\infty[$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$

لها حلًا وحيدًا β من $]0, +\infty[$.

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β على \mathbb{R} .

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x - 2$ مقارب لـ (γ) بجوار $-\infty$.

5.5 المعادلات والمتراحجات

خاصية

- (1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماما m فالمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} ونرمز له بـ $\ln(m)$ ونكتب $x = \ln(m)$
- (2) من أجل كل عددين حقيقيين a و b :
 $e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a(e^b)$ يكافئ $a < b$

الإثبات

- (1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} فهي إذن مستمرة على \mathbb{R} وبالإضافة إلى كونها متزايدة تماما على \mathbb{R} فإنها تقابل من \mathbb{R} في $]0, +\infty[$.
- (2) بما أن الدالة الأسية قابلة للتقابل من \mathbb{R} في $]0, +\infty[$ ومتزايدة تماما على \mathbb{R} فإن $e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a(e^b)$ يكافئ $a < b$.

ملاحظة

بما أن المعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا هو $\ln(m)$ فإنه يمكن كتابة $e^{\ln(m)} = m$

تمرين تدريبي 1

بسط الأعداد التالية : $A = e^{\ln(2) - \ln(3)}$ ، $B = \frac{e^{\ln(\frac{1}{2})}}{e^{\ln(2)}}$ ، $C = e^{-2\ln(3)}$ ، $D = e^{2\ln(5)}$ ، $E = e^{\ln(3) - 2\ln(2)}$

الحل

$$A = e^{\ln(2)} \times e^{-\ln(3)} = 2 \times \frac{1}{e^{\ln(3)}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{\ln(\frac{1}{2})}}{e^{\ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2\ln(3)} = \frac{1}{e^{2\ln(3)}} = \frac{1}{(e^{\ln(3)})^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2\ln(5)} = (e^{\ln(5)})^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{\ln(3) - 2\ln(2)} = e^{\ln(3)} \times \frac{1}{e^{2\ln(2)}} = 3 \times \left(\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والمتراحجات التالية

(1) $e^{x^2+3x} = e^4$ ، (ب) $e^{2x+1}(e^{x^2-x-3})$ ، (ج) $e^{-3x+2} \geq 3$

الحل

المعادلتان $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ و $U(x) = V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول
 المتراحتان $e^{U(x)} < e^{V(x)}$ و $U(x) < V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

المعادلتان $e^{x^2+3x} = e^4$ و $x^2+3x=4$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المعادلة $x^2+3x=4$ تكافئ المعادلة $x^2+3x-4=0$ التي حلاها هما $x_1=1$ و $x_2=-4$

إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{x^2+3x} = e^4$ هي $S = \{1, -4\}$.

المتراحتان $e^{x^2-x-3} < e^{2x+1}$ و $x^2-x-3 < 2x+1$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المتراحية $x^2-x-3 < 2x+1$ تكافئ المتراحية $x^2-3x-4 < 0$

وهذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]4, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

إذن مجموعة حلول المتراحية (ب) هي $S =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

(ج) بما أن $e^{\ln 3} = 3$ فإن المتراحية (ج) تكتب على الشكل $e^{-3x+2} \geq e^{\ln 3}$

المتراحتان $e^{-3x+2} \geq e^{\ln 3}$ و $-3x+2 \geq \ln 3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المتراحية $-3x+2 \geq \ln 3$ هي $]-\infty, \frac{2-\ln 3}{3}[$

إذن مجموعة حلول المتراحية (ج) هي $S =]-\infty, \frac{2-\ln 3}{3}[$

تمرين تدريبي 3

حل المعادلات والمتراحجات التالية

(1) $e^{2x} = (e^{-x})^2 \times e^{-3}$ ، (ب) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ ، (ج) $e^{-x} - 3 \geq 0$

الحل

لحل معادلة من الشكل $ae^{2x} + be^x + c = 0$ نضع $e^x = X$

الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد x_0 بحيث $x_0 = \ln(X_0)$ حيث X_0 هو الحل

الموجب للمعادلة $aX^2 + bX + c = 0$

$$(e^{-x})^2 \times e^{-3} = e^{-2x} \times e^{-3} = e^{-2x-3} \quad (1)$$

ومنه المعادلة (1) تكتب على الشكل $e^{2x} = e^{-2x-3}$

و هذه الأخيرة تكافئ $2x = -2x - 3$

مجموعة حلول المعادلة $2x = -2x - 3$ هي $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

و منه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

(ب) بوضع $X = e^x$ للمعادلة (ب) نكتب على الشكل (I) $X^2 - 3X - 4 = 0$

حلا للمعادلة (I) هما $X_0 = 4$ و $X_1 = -1$

$X_1 = -1$ مرفوض و $X_0 = 4$ مقبول

" $X_0 = \ln(X_0) = \ln 4$ " يكافئ

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \{\ln 4\}$

(ج) $e^{-x} - 3 \geq 0$ يكافئ $e^{-x} \geq e^{\ln 3}$ يكافئ $-x \geq \ln 3$

إذن مجموعة حلول التراجحة (ج) هي $S =]-\infty, -\ln 3]$

6. الدالة المركبة $e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.

الدالة \exp معرفة على \mathbb{R} وبالتالي مجموعة تعريف الدالة \exp هي مجموعة تعريف الدالة u

مبرهنة

(1) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من \mathbb{R} فإن الدالة f المعرفة بـ

$f(x) = (\exp u)(x) = e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

(2) اتجاه تغير الدالة $e^{u(x)}$ هو نفس اتجاه تغير الدالة u

الإثبات

(1) $f'(x) = (\exp u)'(x) = u'(x) \times \exp(u(x))$

لكن $\exp'(u(x)) = e^{u(x)}$ و عليه $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

(2) بما أن $e^{u(x)} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة $e^{u(x)}$ هو نفس اتجاه تغير الدالة $u(x)$

مثال 1

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $f(x) = e^{2x+3}$ (ب) $f(x) = e^{2x^2+x}$ (ج) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(د) $f(x) = e^{\sin x}$ (هـ) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$

الحل

(أ) الدالة $x \mapsto 2x+3$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي الدالة f معرفة وقابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 2 \times e^{2x+3}$

(ب) الدالة $x \mapsto 2x^2+x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي الدالة f معرفة و

قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$

(ج) الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ ولدينا $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

(د) الدالة $x \mapsto \sin(x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$

(هـ) الدالة $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي الدالة f معرفة وقابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} e^{\frac{x}{x^2+1}}$

تمرين تدريبي 1

احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $f(x) = e^{2x+3}$ (2) $f(x) = e^{x-2}$

(3) $f(x) = e^{-x^2}$ (4) $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

الحل

(1) نهاية الدالة $x \mapsto 2x+3$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$

ونتيجة الدالة $x \mapsto e^x$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) نهاية الدالة $x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$ عند $(+\infty)$ هي 2

ونتيجة الدالة $x \mapsto e^x$ عند 2 هي e^2 ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^2$

(3) نهاية الدالة $x \mapsto -x^2$ عند $(+\infty)$ هي $(-\infty)$

ونتيجة الدالة $x \mapsto e^x$ لا $x \rightarrow 0$ هي $(-\infty)$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تمرين تدريبي 2

لتكن $f_k(x) = e^{-kx}$ و $g_k(x) = e^{-kx^2}$ كما يلي مع $k > 0$. (γ_k) و (Γ_k) للنحنين الممثلين لـ f_k و g_k على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

(1) ادرس تغيرات الدالة f_k

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2)

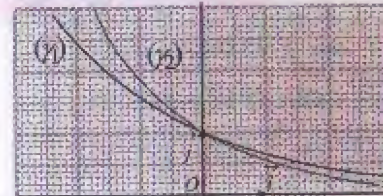
(2) ادرس تغيرات الدالة g_k

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ثم ارسم (Γ_1) و (Γ_2)

الحل

(1) الدالة $-kx \rightarrow x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي الدالة f_k معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'_k(x) = (-k)e^{-kx}$

بما أن $k > 0$ فإن من أجل كل عند حقيقي x يكون $f'_k(x) < 0$ أي أن f_k متناقصة تماما على \mathbb{R} .



x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة f'_k	-	
تغيرات f_k	$+\infty \rightarrow 0$	

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-kx) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-kx) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-kx} = +\infty$

(ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة الفرق $f_2(x) - f_1(x)$

$$f_2(x) - f_1(x) = e^{-2x} - e^{-x} = e^{-x}(e^{-x} - 1) = e^{-x} \left(\frac{1 - e^x}{e^x} \right)$$

$$f_2(x) - f_1(x) = 0 \text{ يكافئ } 1 - e^x = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

إذا كان $x > 0$ فإن $f_2(x) - f_1(x) < 0$ وبالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)

إذا كان $x < 0$ فإن $f_2(x) - f_1(x) > 0$ وبالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)

الاستقيم ذو العادلة $y = 0$ مقارب للمتحتي (γ_k) في جوار $(-\infty)$

(2) دراسة تغيرات الدالة g_k

الدالة $-kx^2 \rightarrow x$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

اذن الدالة g_k معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

$$\text{ولدينا } g'_k(x) = -2kx e^{-kx^2}$$

$$g'_k(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

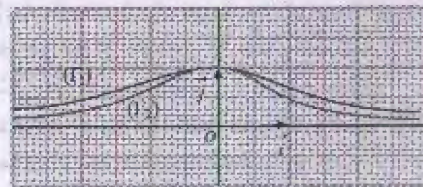
إذا كان $x > 0$ فإن $g'_k(x) < 0$ وبالتالي g_k متناقصة تماما على $]0, +\infty[$

إذا كان $x < 0$ فإن $g'_k(x) > 0$ وبالتالي g_k متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-kx^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-kx^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = 0$$

وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = 0$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'_k(x)$	+	0	-
تغيرات g_k	$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		

(ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ندرس إشارة المقدار $g_2(x) - g_1(x)$

$$g_2(x) - g_1(x) = e^{-2x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} \left(\frac{1 - e^{x^2}}{e^{x^2}} \right)$$

$$g_2(x) - g_1(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 0$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $x^2 > 0$

وبما أن الدالة \exp متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

$$\text{فإن } e^{x^2} > 1 \text{ أي } e^{x^2} > 1$$

اذن $g_2(x) - g_1(x) < 0$ وهذا يعني أن (Γ_2) يقع تحت (Γ_1)

الاستقيم ذو العادلة $y = 0$ مقارب لـ (Γ_1) و (Γ_2) في جوار $+\infty$ و $-\infty$

الدالة g_k زوجية وبالتالي منحناها يقبل المستقيم $(x = 0)$ كمحور تناظر له

7. المعادلات التفاضلية

نسمي معادلته تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.

حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق على I

والتي تحقق المعادلة المعطاة.

في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل،

$$y' = ay + b \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان و } a \neq 0$$

1.7 حل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$

مبرهنة 1

لحل المعادلة التفاضلية $y' = ay$ مع $a \neq 0$ على \mathbb{R} هي دوال $f_k(x) = k e^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كافي.

الإثبات

من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $f'_k(x) = a k e^{ax} = a f_k(x)$ إذن $f'_k(x) = a f_k(x)$ وهذا يعني أن f_k حل للمعادلة التفاضلية $y' = ay$.

• وحداية الدوال f_k

لإثبات أن الدوال f_k هي الدوال الوحيدة التي تحقق $y' = ay$

نفرض أنه توجد دوال g حلول للمعادلة $y' = ay$ ونبين أن g من الشكل f_k .

لتكن h دالة معرفة بـ $h(x) = g(x) e^{-ax}$

الدالة h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - a g(x))$

بما أن g حل للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ فإن $g'(x) - a g(x) = 0$

وعليه نجد $h'(x) = 0$

إذن الدالة h ثابتة

وهذا يعني من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $h(x) = k$

إذن $g(x) = k e^{ax}$

مبرهنة 2

من أجل كل ثنائية (x_0, y_0) للمعادلة $y' = ay$ تقبل حلا وحيدا f

بحيث $f(x_0) = y_0$

الإثبات

القول أن $f_k(x_0) = y_0$ يكافئ القول أن $k e^{ax_0} = y_0$

إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ k هي $y_0 e^{-ax_0}$

والدالة f معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$

مثال -

حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية $y' = -3y$ مع $(x_0, y_0) = (1, 3)$

الحل

حل المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدالة f المعرفة من أجل كل x بالعلاقة

$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ وبتعويض a و x_0 و y_0 نجد $f(x) = 3 e^{-3(x-1)}$

مبرهنة

الحلول في \mathbb{R} للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ هي الدوال $f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كافي.

الإثبات

نفرض أن الدالة f القابلة للاشتقاق على I هي حلا للمعادلة $y' = ay + b$ عندئذ نضع من أجل كل x من \mathbb{R} نضع $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = f'(x)$

لكن $f'(x) = a f(x) + b = a g(x)$

إذن $g'(x) = a g(x)$ وهذا ما يثبت أن g هي حل للمعادلة التفاضلية $y' = ay$

إذن g هي الدالة $x \mapsto k e^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كافي.

بالعكس كل دالة f من الشكل $x \mapsto k e^{ax} - \frac{b}{a}$ هي حل للمعادلة $y' = ay + b$ لأنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = a f(x) + b$ و $f'(x) = k a e^{ax}$

وعليه حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال $f_k(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

ملاحظة

المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات a و b ثابتة.

تمرين تدريبي

أوجد الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $(E) \quad y + y' = 1$ بحيث $f(0) = 2$

الحل

المعادلة التفاضلية (E) تكتب على الشكل $y' = -y + 1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال $f_k(x) = k e^{-x} + 1$ من أجل كل x من \mathbb{R} بـ $f_k(0) = 2$ يكافئ $k + 1 = 2$ يكافئ $k = 1$

منه الدالة f المطلوبة معرفة كما يلي $f(x) = e^{-x} + 1$

تطبيق 3 مركز تناظر لبيان دالة

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R}$$

(1) بين أن $f(-x) + f(x) = 2$ ماذا تستنتج؟

$$(2) \text{ تحقق من أن } f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$$

✓ الحل

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - 1}{e^x + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} \quad (1)$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{1 + e^x} = \frac{2 + 2e^x}{1 + e^x} = 2$$

منه نستنتج النقطة $A(0, 1)$ مركز تناظر لبيان

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 \quad (2)$$

تطبيق 4 كيفية التحقق من صحة مساواة

تحقق من صحة المساواة المعطاة من أجل كل x في كل حالة من الحالات التالية:

$$\frac{e^x}{e^x - x} = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \quad (2) \quad \frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{3}{e^x + 1} \quad (4) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (3)$$

✓ الحل

$$\frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{e^x}{e^x \left(\frac{2}{e^x} + 1 \right)} = \frac{1}{2e^{-x} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{e^x}{e^x - x} = \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} \right)} = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \quad (2)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (3)$$

$$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 3}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{3}{e^x + 1} = 1 - \frac{3}{e^x + 1} \quad (4)$$

تطبيقات نموذجية



تطبيق 1

تبسيط عبارة

$$A = (\exp(x))^2, B = \frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}$$

$$C = \frac{\exp(2x) \times \exp(x)}{\exp(5x+1)}$$

$$\frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3} = 1 - \frac{6}{\exp(x)+3} \quad (2)$$

✓ الحل

$$A = (\exp(x))^2 = (\exp(x))^2 \times (\exp(x))^2 = \exp(2x) \times \exp(2x) = \exp(4x) \quad (1)$$

$$B = \frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)} = \frac{\exp(7x-3)}{(\exp(7x))^{-1}} = \exp(7x-3) \exp(7x) = \exp(7x-3+7x) = \exp(14x-3)$$

$$C = \frac{\exp(2x) \exp(x)}{\exp(5x+1)} = \frac{\exp(3x)}{\exp(5x+1)} = \exp(3x) \times \exp(-5x-1) = \exp(-2x-1)$$

$$\frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3} = \frac{\exp(x)+3-6}{\exp(x)+3} = 1 - \frac{6}{\exp(x)+3} \quad (2)$$

تبسيط الأعداد

تطبيق 2

$$C = \frac{e^{3x}}{(e^x)^3}, B = \frac{2}{e^{-1+3 \ln(2)}}, A = e^{-\ln(2)} + e^{\ln(3)}$$

✓ الحل

$$A = \frac{1}{e^{\ln(2)}} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

$$B = \frac{2}{e^{-1+3 \ln(2)}} = \frac{2}{e^{-1} \times e^{3 \ln(2)}} = \frac{2}{e^{-1} \times (e^{\ln(2)})^3} = \frac{2}{e^{-1} \times 2^3} = \frac{e}{4}$$

$$C = \frac{e^{3x}}{(e^x)^3} = \frac{e^{3x}}{e^{3x}} = e^{3x-3x} = e^0 = 1$$

تطبيق 5

تعيين مجموعة حلول معادلة

حل المعادلات التالية:

(أ) $e^x = 1$ ، (ب) $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+2}$ ، (ج) $2e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}-2}$

(د) $(e^{-x}-5)(e^{2x}-e) = 0$ ، (هـ) $\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}} = 3$

✓ الحل

(أ) $e^x = 1$ تكافئ $e^x = e^0$ تكافئ $3x = 0$ تكافئ $x = 0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S = \{0\}$

(ب) مجموع تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R} - \{0\}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{\frac{1}{x}} = e^{x+2}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-\frac{1}{x} = x+2$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل $x^2 + 2x + 1 = 0$ وحلها هو $x = -1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \{-1\}$

(ج) المجموعة التي تكون فيها المعادلة (ج) لها معنى هي $\mathbb{R} - \{0\}$

المعادلة (ج) تكتب على الشكل $e^{-2x} = \frac{1}{4}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-2x} = \frac{1}{4}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-2x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

وحلول هذه الأخيرة هي $x = -\frac{1}{2} \ln(4)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \left\{-\frac{1}{2} \ln(4)\right\}$

(د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $]-\infty, +\infty[$

$(e^{-x}-5)(e^{2x}-e) = 0$ تكافئ $e^{-x}-5=0$ أو $e^{2x}-e=0$

$e^{-x}-5=0$ تكافئ $e^{-x}=5$ ومنه $-x = \ln(5)$ أي $x = -\ln(5)$

$e^{2x}-e=0$ تكافئ $e^{2x}=e$ ومنه $2x=1$ أي $x = \frac{1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S = \left\{\frac{1}{2}, -\ln(5)\right\}$

(هـ) مجموعة تعريف المعادلة (هـ) هي \mathbb{R}

المعادلة (هـ) تكتب على الشكل $e^{-x} = 3 + 6e^{-x}$ ومنه $e^{-x} = \frac{-3}{5}$

تطبيق 6

تعيين مجموعة حلول متراجحة

حل المتراجحات التالية:

(أ) $e^{2x} \geq 1$ ، (ب) $3e^{-x} - 2 \geq 0$ ، (ج) $(e^x+3)(2-e^x) \geq 0$

(د) $\frac{e^x-1}{e^x} \geq 0$ ، (هـ) $e^{-x^2-x} \leq 1$ ، (و) $e^x - \frac{9}{e^x} < 0$

✓ الحل

(أ) مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي \mathbb{R}

المتراجحة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x} \geq e^0$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $2x \geq 0$ أي $x \geq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S = [0, +\infty[$

(ب) مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي \mathbb{R}

المتراجحة (ب) تكتب على الشكل $e^{-x} \geq \frac{2}{3}$ أي $e^{-x} \geq e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $-x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

مجموعة حلول المتراجحة $-x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ هي $]-\infty, -\ln\left(\frac{2}{3}\right)[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S =]-\infty, -\ln\left(\frac{2}{3}\right)[$

(ج) مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي \mathbb{R}

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $e^x + 3 > 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي نفس حلول المتراجحة $2 - e^x \geq 0$

$2 - e^x \geq 0$ تعني $e^x \leq 2$

مجموعة حلول المتراجحة $e^x \leq 2$ هي $]-\infty, \ln(2)[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S =]-\infty, \ln(2)[$

المتراجحة $\frac{e^x-1}{e^x} \geq 0$ تكافئ $e^x - 1 \geq 0$ أي $e^x \geq 1$

مجموعة حلول المتراجحة $e^x \geq 1$ هي $[0, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = [0, +\infty[$

(هـ) مجموعة حلول التراجحة $e^{-x^2-x} \leq 1$ هي نفسها مجموعة حلول التراجحة $-x^2-x \leq 0$ ولكن مجموعة حلول التراجحة $-x^2-x \leq 0$ هي $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ إذن مجموعة حلول التراجحة (هـ) هي $S =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$

(و) التراجحة (و) تكتب على الشكل $\frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x} > 0$

وبما أن $\frac{e^x+3}{e^x} > 0$ فإن مجموعة حلول التراجحة (و) هي نفسها مجموعة حلول التراجحة $e^x - 3 > 0$ وهذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $Ln(3) < x < +\infty$ إذن مجموعة حلول التراجحة (و) هي $S =]Ln(3), +\infty[$

تطبيق 7

تعيين مجموعة حلول معادلات ومتراحجات

- (1) عين جذور كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث $p(x) = x^2 + 4x - 5$
- (2) استنتج حلول المعادلة $(E) \dots e^{2x} + 4e^x = 5$
- (3) حل التراجحة التالية $(E') \dots e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0$

الحل

- (1) $\Delta = 16 - 4(1)(-5) = 36$ بما أن $\Delta > 0$ فإن $p(x)$ جذرين هما 1 و -5
- (2) بوضع $X = e^x$ المعادلة (E) تكتب $X^2 + 4X - 5 = 0$ ومن السؤال الأول نجد أن $X = 1$ أو $X = -5$ و $X = -5$ مرفوض لأن $X > 0$.
 $X = 1$ يكافئ $e^x = 1$ يكافئ $x = 0$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{0\}$
- (3) التراجحة (E') تكتب على الشكل $(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ بما أن $e^x + 5 > 0$ فإن مجموعة حلول (E') هي نفسها مجموعة حلول التراجحة $e^x - 1 \leq 0$ $e^x - 1 \leq 0$ يكافئ $x \leq 0$ إذن مجموعة حلول التراجحة (E') هي $S =]-\infty, 0]$

تطبيق 8

تعيين مجموعة حلول معادلات ومتراحجات

حل المعادلات والمتراحجات التالية:

- (1) $\frac{e^{x+1}+1}{e^x-1} = 4$ (ب) $e^{5x+4} + 4e^{2x+3} - 5e^{x+2} = 0$

$$\frac{e^{x+1}-1}{e^{2x+2}+1} \leq \frac{e^{x+1}-2}{e^{x+1}+2} \quad (د) \quad e^{3x} - (e^2-1)e^{2x} = e^{x+2} \quad (ج) \\ 4e^{2x} - e^{-2x} \leq 3 \quad (هـ)$$

الحل

(1) مجموعة تعريف المعادلة (1) هي $\mathbb{R} - \{0\}$

المعادلة (1) تكتب على الشكل $4e^{2x} - 5e^x - 1 = 0$... (1')

بوضع $X = e^x$ المعادلة (1) تكتب على الشكل $4X^2 - 5X - 1 = 0$

وحلا هذه الأخيرة هما $X_1 = \frac{5+\sqrt{39}}{8}$ و $X_2 = \frac{5-\sqrt{39}}{8}$

X_2 حل مرفوض لأنه سالب.

$X = X_1$ يكافئ $e^x = X_1$ ومنه $x = Ln(X_1)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{Ln(X_1)\}$

(ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي \mathbb{R} .

بضرب المعادلة (ب) في e^{-2} نجد (1) ... $e^{3x+2} + 4e^{2x+1} - 5e^x = 0$

وبوضع $X = e^x$ تصبح المعادلة (1) كما يلي $e^2 X^3 + 4e X^2 - 5X = 0$... (1')

$X(e^2 X^2 + 4e X - 5) = 0$ تكافئ $X(e^2 X^2 + 4e X - 5) = 0$

يكافئ $(X=0)$ أو $(e^2 X^2 + 4e X - 5 = 0)$

يكافئ $(X=0)$ أو $(X = \frac{1}{e})$ أو $(X = \frac{-5}{e})$

$X = \frac{-5}{e}$ مرفوض لأنه سالب و $X = 0$ مرفوض لأنه معدوم.

$X = \frac{1}{e}$ يكافئ $e^x = \frac{1}{e}$ يكافئ $x = -1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \{-1\}$

(ج) بوضع $X = e^x$ المعادلة (ج) تصبح كما يلي $X^3 - (e^2-1)X^2 - e^2 X = 0$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل $X^2 - (e^2-1)X - e^2 = 0$ لأن $X > 0$

حلا المعادلة $X^2 - (e^2-1)X - e^2 = 0$ هما e^2 و -1

بما أن $X > 0$ فإن -1 مرفوض.

$X = e^2$ يكافئ $e^x = e^2$ منه $x = 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \{2\}$

(د) مجموعة تعريف التراجحة (د) هي \mathbb{R}

بوضع $X = e^{x+1}$ التراجحة (د) تكتب $\frac{X-1}{X^2+1} \leq \frac{X-2}{X+2}$

و بالتبسيط نجد $\frac{-X^2(X-3)}{(X^2+1)(X+2)} \leq 0$ (f)

وبما أن $\frac{X^2}{(X^2+1)(X+2)} > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (f) هي نفس مجموعة

حلول المتراجحة $-(X-3) \leq 0$ أي $X \geq 3$

$X \geq 3$ يكافئ $e^{X+1} \geq 3$ يكافئ $x+1 \geq \ln 3$ يكافئ $x \geq -1 + \ln 3$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = [-1 + \ln 3, +\infty[$

(هـ) بضرب طرفي المتراجحة (هـ) في e^{2x} نجد $4e^{4x} - 3e^{2x} - 1 \leq 0$ (1)

وبوضع $e^{2x} = X$ تصبح المتراجحة (1) كما يلي $4X^2 - 3X - 1 \leq 0$ (i)

ومجموعة حلول المتراجحة (i) هي $[0, 1]$

$X \in [0, 1]$ يكافئ $(e^x)^2 \in [0, 1]$ يكافئ $x < 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S =]-\infty, 0[$

تطبيق 9

تعيين مجموعة حلول جملة معادلتين

حل الجملة التالية :

$$\begin{cases} xy = -2 \\ e^{4x} \times e^{2y} = \frac{1}{e^2} \end{cases} \quad \text{ (ج) } \quad \begin{cases} e^x + e^y = e + 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{ (ب) } \quad \begin{cases} 2e^x - e^y = e \\ e^x + 2e^y = 1 \end{cases} \quad \text{ (ا) }$$

✓ الحل

(1) بوضع $X = e^x$ و $Y = e^y$ الجملة (1) تصبح كما يلي $\begin{cases} 2X - Y = e \dots (1) \\ X + 2Y = 1 \dots (2) \end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 تصبح الجملة كما يلي

$$\begin{cases} 4X - 2Y = 2e \dots (1') \\ X + 2Y = 1 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (1') و (2) طرفاً لطرف نجد $5X = 1 + 2e$ ومنه $X = \frac{1+2e}{5}$

وبتعويض قيمة X في المعادلة (2) نجد $Y = \frac{1-X}{2} = \frac{2-e}{5}$

$X = \frac{1+2e}{5}$ يكافئ $e^x = \frac{1+2e}{5}$ يكافئ $x = \ln\left(\frac{1+2e}{5}\right)$

$Y = \frac{2-e}{5} < 0$ ومنه y غير موجود وبالتالي الجملة (1) ليس لها حلولاً في \mathbb{R}^2

(ب) لدينا $x+y=1$ منه $y=1-x$ وبتعويض عبارة y في المعادلة $e^x + e^y = e+1$

نجد $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$ (*)

بوضع $X = e^x$ المعادلة (*) تكتب $X^2 - (e+1)X + e = 0$ وحلاً هذه الأخيرة هما e و 1

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

$X=e$ يكافئ $e^x=e$ يكافئ $x=1$

لما $x=0$ نجد $y=1$ ولما $x=1$ نجد $y=0$

ومنه مجموعة حلول الجملة (ب) هي $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$

(ج) الجملة (ج) تكتب على الشكل $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{4x+y} = e^{-2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} xy = -2 \\ 4x+y = -2 \end{cases}$

من المساواة $xy = -2$ نجد $y = \frac{-2}{x}$ مع $x \neq 0$

نعوض عبارة y في المعادلة $4x+y = -2$ نجد $4x - \frac{2}{x} = -2$

بالتبسيط نجد $4x^2 + 2x - 2 = 0$ وحلاً هذه الأخيرة هما $\frac{1}{2}$ و -1

لما $x = \frac{1}{2}$ نجد $y = -4$ ولما $x = -1$ نجد $y = 2$

إذن مجموعة حلول الجملة (ج) هي $\left\{\left(\frac{1}{2}, -4\right), (-1, 2)\right\}$

تطبيق 10

حساب نهايات دالة

عين نهاية الدالة f عند العدد العطلي في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{e^x - 1}{3x}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ب) $f(x) = 5xe^{-x}$ عند $-\infty$

(ج) $f(x) = \frac{2e^x - 2}{2x - 2}$ عند $+\infty$ و $(-\infty)$

(د) $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{e^x} + 1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(هـ) $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ عند $(-\infty)$

✓ الحل

(1) لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \times \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{3}$

✓ الحل

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto (x^2 - 3x)$ ولدينا $f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2 - 3x) = e^x(x^2 - x)$

(ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ولدينا $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

(ج) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ولدينا $f'(x) = e^x \times \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} (e^x - 1) = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$

(د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$

ولدينا $f'(x) = \frac{e^x(x+1) - (e^x - 1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + 1}{(x+1)^2}$

(هـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto \cos x$ ولدينا $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

تطبيق 12 دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق دالة عند عدد

✓ الحل

$f(x) = 2e^{x-1} - 1$ ، $x \leq 1$
 $f(x) = 2 - x$ ، $x > 1$

(1) عين مجموعة التعريف للدالة f

(2) ادرس استمرارية f عند $x=1$

(3) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=1$

✓ الحل

(أ) الدالة $f(x) = 2e^{x-1} - 1$ معرفة على \mathbb{R} بالتالي فهي معرفة على $]-\infty, 1]$

و الدالة $f(x) = 2 - x$ معرفة على \mathbb{R} فهي معرفة على $]1, +\infty[$

إذن الدالة f معرفة على $]-\infty, 1] \cup]1, +\infty[$ أي معرفة على \mathbb{R}

(ب) f مستمرة عند 1 يعني أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ و $1 \in D_f$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2e^{x-1} - 1) = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1 = f(1)$$

إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ و عليه فإن f مستمرة عند العدد 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \times \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{3} = \frac{1}{3} \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \times \frac{1}{3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5xe^{-x} = -\infty \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 2}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} \left[\frac{2 - \frac{2}{e^x}}{2 - \frac{2}{x}} \right] = +\infty \text{ (ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{e^x}}{2 - \frac{2}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 2) \times \frac{1}{2x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 2) = -2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (1 - e^{-x} + e^{-2x}) = +\infty \text{ (د)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-2x}} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^{-x}} + 1 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} \right] = +\infty \text{ (هـ)}$$

تطبيق 11 حساب العدد المشتق

✓ الحل

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل

حالة من الحالات التالية: (أ) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$ ، (ب) $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

(ج) $f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$ ، (د) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x+1}$ ، (هـ) $f(x) = e^x \cos x$

(3) f قابلة للاشتقاق عند 1 يعني أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ell$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^X - 1}{X} = 2 = \ell_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x - 1} = -1 = \ell_2$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1

المستقيم المقارب المائل - التمثيل البياني

تطبيق 13

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = -x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$ و (γ) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس.
(1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
(2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x - 1$ مقارب لـ (γ) مائل بجوار $-\infty$
(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $+\infty$
(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 + e^{-x}} = 4$$

(2) (د) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1 + e^x} = 0 \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{1 + e^x} = 0$$

(ب) (د) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-4 + \frac{4e^x}{1 + e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1 + e^x} = 0$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{1 + e^x} = 0$ فإن (د) مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

(ج) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -\frac{(e^x - 1)^2}{(1 + e^x)^2}$

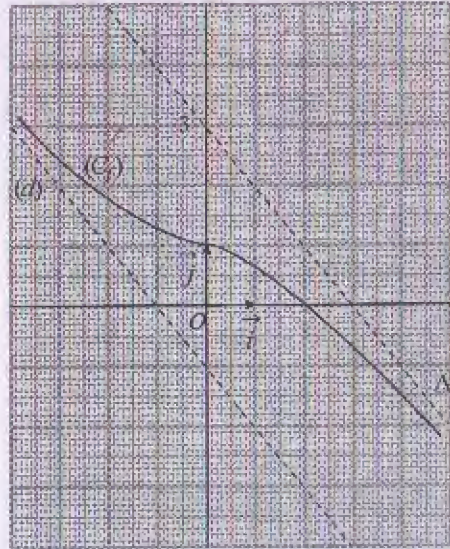
$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } e^x - 1 = 0$$

يكافئ $x = 0$

من أجل كل $x \neq 0$

يكون $f'(x) < 0$

إذن الدالة f متناقصة تماماً على \mathbb{R} .



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
تغيرات f	$+\infty$		$-\infty$

$f'(x)$ يتعدم عند $x = 0$

ولا يغير إشارته

ومنه النقطة $A(0, 1)$

هي نقطة إنعطاف لـ (C_f)

تطبيق 14

تعيين عبارة دالة ثم رسم تمثيلها البياني

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2e^x + ax + b$ و (γ) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس حيث a و b حقيقيان.

(1) عين a و b بحيث للتحني (γ) يمر من النقطة $O(0, 0)$ و معامل توجيه

المماس لـ (γ) عند النقطة O هو -2

(2) من أجل الدالة الحاصل عليها سابقاً

(أ) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

(ج) استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين أحدهما 0 و الآخر α حيث $1 < \alpha < 2$

(د) عين إشارة $f'(x)$ حسب قيم x

(هـ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -4x - 2$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

ثم ادرس وضعية (d) بالنسبة إلى (γ) ثم ارسم (γ) و (d)

الحل

(أ) يمر من النقطة $O(0, 0)$ يعني أن $f(0) = 0$

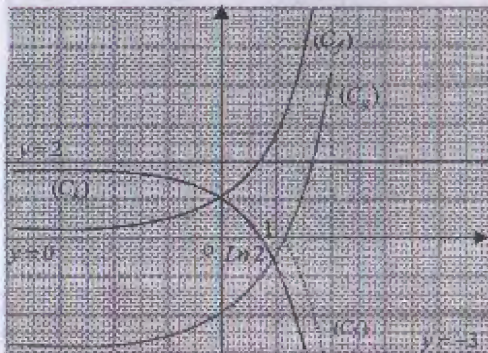
15 تطبيق

تعيين التمثيل البياني لدوال انطلاقاً من بيان معطى

ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحنى (C_f) الممثل للدالة $f(x) = e^x - 3$.
ثم استنتج التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية انطلاقاً من (y)
 $K(x) = 2 - e^x$ ، $L(x) = |3 - e^x|$ ، $g(x) = e^x - 3$

الحل

- 0) بما أن $f(x) = e^x - 3 = f(x) - 3$ فإن بيان الدالة g هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه \vec{j} -3
 (C_f) له مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ بجوار $-\infty$
و (C_g) له مستقيم مقارب معادلته $y = -3$ بجوار $-\infty$
ب) $\begin{cases} L(x) = -g(x) , & x \leq \ln 3 \\ L(x) = g(x) , & x \geq \ln 3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} L(x) = 3 - e^x , & x \leq \ln 3 \\ L(x) = e^x - 3 , & x \geq \ln 3 \end{cases}$
- على المجال $[-\ln 3, +\infty[$ بيان الدالة L منطبقاً على (C_g)
- على المجال $]-\infty, \ln 3]$ بيان الدالة L هو نظير (C_g) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = 0$



$$K(x) = 2 - e^x = 2 - f(x)$$

$$\frac{K(x) + f(x)}{2} = 1 \text{ ومنه } 1$$

أي أن بيان الدالة K هو نظير (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = 1$
- (C_K) يقطع (x, x') في النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$
و (C_L) يقطع (x, x') في النقطة ذات الفاصلة $\ln 3$

دراسة تغيرات دالة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ بـ $f(x) = e^x + \frac{1-x}{1+x}$ و (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس
1) ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجالين $]-\infty, -1[$ ، $]-1, +\infty[$
2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

16 تطبيق

$$f(0) = 0 \text{ تكافئ } 2 + b = 0 \text{ تكافئ } b = -2$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = 2e^x + a$

$$f'(0) = -2 \text{ تعني } 2 + a = -2 \text{ ومنه } a = -4$$

إذن الدالة المطلوبة هي $f(x) = 2e^x - 4x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 4x - 2) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{e^x}{x} - 2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

ب) من السؤال (1) لدينا $f'(x) = 2e^x - 4$

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ } e^x = 2 \text{ تكافئ } x = \ln 2$$

و $x > \ln 2$ فإن $2e^x - 4 > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[\ln 2, +\infty[$
و $x < \ln 2$ فإن $2e^x - 4 < 0$ ومنه f متناقصة تماماً على $] -\infty, \ln 2]$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	0	+	+
تغيرات f	$+\infty$		$f(\ln 2)$		$+\infty$

$$f(\ln 2) \approx -0.76$$

ج) بما أن $f(0) = 0$ فإن 0 حلاً للمعادلة $f(x) = 0$

- بما أن من أجل كل x من $[\ln 2, +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$

و $0 \in] -4 \ln 2, +\infty[$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α من $[\ln 2, +\infty[$

وبما أن $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$ فإن $1 < \alpha < 2$

د) - إذا كان $[\alpha, +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

- إذا كان $]0, \alpha]$ فإن $f(x) < 0$

هـ) (د) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$$

بما أن (d) مستقيم مقارب لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

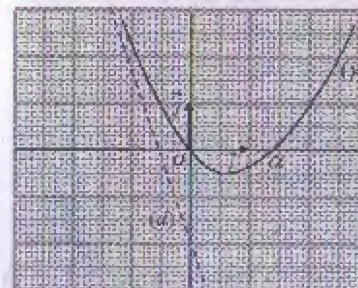
نعين إشارة المقدار $f(x) - (-4x - 2)$ على \mathbb{R}

$$\text{لدينا } f(x) - (-4x - 2) = 2e^x$$

من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $2e^x > 0$

$$\text{ومنّه } f(x) - (-4x - 2) > 0$$

أي أن المنحنى (γ) يقع فوق المستقيم (d)



✓ الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$

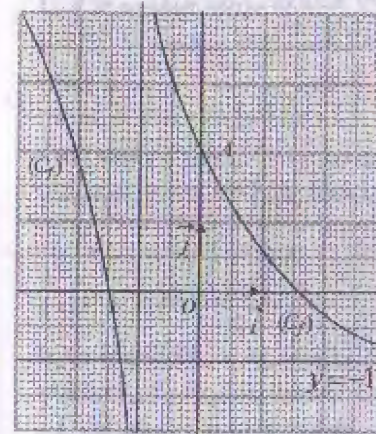
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} = e$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} = e$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا $f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(1+x)^2}$

من أجل كل x من D_f يكون $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ و $]-1, +\infty[$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	-
تغيرات f	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ -1

$y = -1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(+\infty)$
 $A(0, 2)$ في النقطة (y) يقطع

تطبيق 17

رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

f معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ و (γ) منحنائها البياني

في معلم متعامد و متجانس.

(1) أدرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحنائها البياني.

(2) عند حقيقي

(أ) بين أن المعادلة $f(x) = m$ لها حل وحيد α على \mathbb{R} .

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$

(ج) استنتج أن $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

✓ الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f	$-\infty$	$+\infty$

من أجل كل x من \mathbb{R}
لدينا $f'(x) > 0$ لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$
إذن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R}
- (γ) يقطع (y) في $O(0, 0)$

(2) أ) بما أن $f'(x) > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R} و $m \in]-\infty, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا α على \mathbb{R} .

(ب) $f(x) = m$ يكافئ $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = m$ يكافئ $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$

(ج) بوضع $e^x = X$ المعادلة $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ تصبح (1) $X^2 - 2mX - 1 = 0$ ومميزها

$\Delta = 4m^2 + 4$ هو

بما أن $\Delta > 0$ فإن للمعادلة (1) لها حلين هما

$X_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$

$X_2 = m - \sqrt{m^2 + 1}$

بما أن $m^2 + 1 > m^2$ فإن $X_2 < 0$

وبالتالي فهو مرفوض.

إذن المعادلة (1) لها حل وحيد $X_1 = m + \sqrt{m^2 + 1}$.

$X = X_1$ يكافئ $x = \ln(X_1)$ يكافئ $x = \ln(m + \sqrt{m^2 + 1})$

بما أن x هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{2x} - 2me^x - 1 = 0$ فإنه هو الحل الوحيد لـ

$f(x) = m$ إذن $\alpha = \ln(m + \sqrt{1 + m^2})$

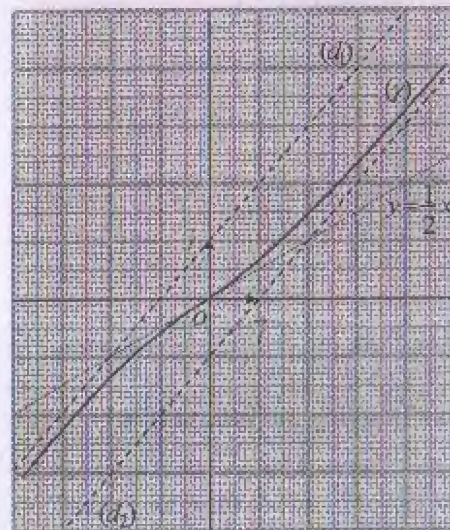
تطبيق 18

رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و (γ) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس

x	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f	0	$+\infty$



x	y
1	$-\frac{e-1}{e+1}$
1,1	0,6

(ب) بما أن f فردية فإننا نقتصر دراستها على المجموعة $D_f \cap \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ الحالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ معادلة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة

$$y = \frac{1}{2}x \text{ هي } x=0$$

بما أن f فردية نرسم بيانها على المجال $[0, +\infty[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المركز O .

(4) بما أن $f'(x) > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R} و $1 \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = 1$ لها حل وحيد α على \mathbb{R}

$$f(1) - 1 = -\frac{e-1}{e+1} < 0$$

$$f(2) - 1 = 1 - \frac{e^2-1}{e^2+1} > 0$$

$$(f(2)-1) \times (f(1)-1) < 0$$

ومنه α تنتمي إلى المجال $]1, 2[$

نستعمل طريقة المسح بخطوة قدرها $P=0,1$ فنحصل على الجدول المجاور ومنه $1,1 < \alpha < 1,2$

تطبيق 19 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

f معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ من أجل $x > 0$

و $f(0) = 0$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 1$ مقارب لـ f .

(2) من أجل كل $x > 0$ نضع $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$

ادرس نهاية $g(x)$ عند الصفر. ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر

(1) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $f(x)$ يكتب على الشكل

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \text{ و } f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

(ب) ادرس نهايات f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ج) بين أن المستقيمين (d_1) و (d_2) حيث $(d_1): y = x+1$ و $(d_2): y = x-1$

(d_2) مقاربان لـ f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$ على التوالي

(د) عين الوضع النسبي لـ f بالنسبة إلى (d_1) و (d_2)

(2) بين أن الدالة f فردية.

(ب) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$

(3) ارسم (d_1) ، (d_2) و f والمماس لـ f عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α محددا حصره بـ $0,1$ بتقريب

الحل

$$f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = x - \frac{e^x+1-2}{e^x+1} = x - \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1} = x - 1 + \frac{2}{e^x+1} \quad (1)$$

$$x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1-e^x}{1+e^x} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x} \right) = -\infty \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{2}{e^x+1} \right) = +\infty$$

(ج) (d_1) مستقيم مقارب مائل لـ f في جوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2e^x}{e^x+1} = 0$ فإن (d_1) مقارب مائل لجوار $(-\infty)$

(d_2) مقارب مائل لـ f في جوار $(+\infty)$ يعني أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0$ فإن (d_2) مقارب مائل لجوار $(+\infty)$

(د) بما أن $f(x) - (x+1) = -\frac{2e^x}{e^x+1} < 0$ فإن المنحني f يقع تحت المستقيم (d_1)

بما أن $f(x) - (x-1) = \frac{2}{e^x+1} > 0$ فإن المنحني f يقع فوق المستقيم (d_2)

(2) f فردية يعني أنه من أجل كل x من \mathbb{R}

فإن $-x$ ينتمي إلى \mathbb{R} و $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \frac{1-e^x}{1+e^x} = -x - \frac{1-e^x}{1+e^x} = -x + \frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية.

✓ الحل

(3) (أ) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

(ب) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم (د) و (ر)

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

إذن فالمستقيم (د) ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (ر)

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$ وبوضع $X = \frac{1}{x}$ نجد

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -(-Xe^{-X}) + 4 \left(-\frac{1}{2} X e^{-\frac{1}{2}X} \right)^2 - 27 \left(-\frac{1}{3} X e^{-\frac{1}{3}X} \right)^3 = 0$

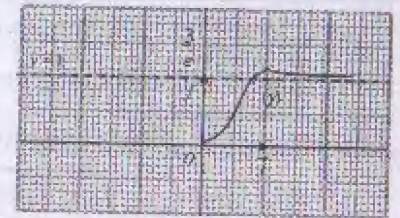
لأن $\lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{-X}) = 0$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} X e^{-\frac{1}{2}X} = 0$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3} X e^{-\frac{1}{3}X} \right) = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر والعدد المشتق هو $f'(0) = 0$

(3) (أ) f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-x)}{x^4}$

(ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$
الدالة f متزايدة تماما على $[0, 1]$ ومتناقصة تماما على $[1, +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات f	↗	↘	↘



تطبيق 20 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعبارة $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$ و (ر) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس $(0, 1, f)$

(1, 1) عين نهاية f على أطراف المجال $[0, +\infty[$

✓ الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (مع $X = \frac{1}{x}$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

(2) $f(x) - x - 1 = x e^{\frac{1}{x}} - x - 1 = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - 1 = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{e^X - 1}{X} - 1 \right] = 0$ (مع $X = \frac{1}{x}$)

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لـ (ر) بجوار $(+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	↘	↗	↗

(3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$

ومن أجل $x > 0$ لدينا $f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x=1$

- إذا كان $x > 1$ فإن $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[1, +\infty[$.

- إذا كان $x < 1$ فإن $f'(x) < 0$ منه f متناقصة تماما على $[0, 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (1)$$

$$X = \frac{1}{x} \quad \text{مع} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 \right] = \lim_{X \rightarrow 0} \left[\frac{e^X - 1}{X} - 1 \right] = 0 \quad (2)$$

إذن فالستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{بما أن}$$

فإن g قابلة للاشتقاق عند الصفر.

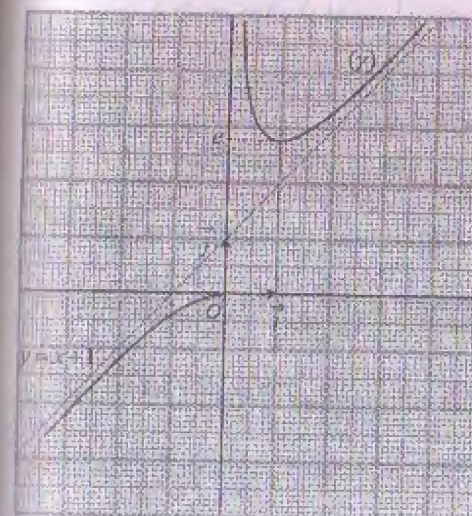
جـ) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0]$

ومن أجل كل $x < 0$ لدينا $g'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

من أجل $x < 0$ لدينا $g'(x) > 0$

ومنه g متزايدة تماما على المجال:

$]-\infty, 0]$



x	$-\infty$	0
إشارة $g'(x)$	$+$	$+$
تغيرات g		\nearrow

تطبيق 21 التمثيل البياني لدالة وحل معادلات

1. دالة معرفة على \mathbb{R} بالصيغة $g(x) = e^x + x + 1$

أدرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .

2. بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا على \mathbb{R} يطلب إيجاد حصرا له

3. استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

4. دالة معرفة على \mathbb{R} بالصيغة $f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$ و (γ) تمثيلها البياني في

مخطط متعامد متجانس

1. بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ثم استنتج تغيرات f على \mathbb{R} .

2. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. عين معادلة المماس (d) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة صفر ثم ادرس

الوضع النسبي لـ (d) و (γ) .

4. عين نهاية f عند $(-\infty)$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

5. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل

لـ (γ) في جوار $(+\infty)$.

6. ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (d) و (Δ) و (γ) .

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad (1)$$

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	$+$	$+$
تغيرات g	\nearrow	\nearrow

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ولدينا $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) > 0$

ومنه g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. بما أن $g'(x) > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R} و $0 \in \mathbb{R}$

فإن للمعادلة $g(x) = 0$ لها حل وحيد α على \mathbb{R} .

بما أن $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$ و $f(-2) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$ فإن $-1 > \alpha$

إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) > 0$ وإذا كان $x < \alpha$ فإن $g(x) < 0$

1- الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا

$$f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(1 + e^x) - e^x x e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x [(1+x)(1+e^x) - x e^x]}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$

وعليه إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ وإذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) < 0$

وإذا كان $x = \alpha$ فإن $f'(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad e^\alpha + \alpha + 1 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad e^\alpha = -\alpha - 1$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{1 + e^\alpha} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{1 - \alpha - 1} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

تطبيق 22

المحور الهندسي والمحل الهندسي

في معلم متعامد ومتجانس نعتبر النحليين (γ_1) و (γ_2) الممثلين للناثين $x \rightarrow e^m$ و $x \rightarrow e^{-m}$.

نرفق بكل عدد حقيقي m النقطة $A(m, 0)$ ولتكن النقطتين M و N من النحليين (γ_1) و (γ_2) على الترتيب فاصلتهما m .

1. ارسم (γ_1) و (γ_2) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. (T_1) و (T_2) مماسان لـ (γ_1) و (γ_2) في النقطتين M و N على التوالي. اوجد معادلة كل من (T_1) و (T_2) ثم بين ان (T_1) و (T_2) متعامدان.

3. المستقيمان (T_1) و (T_2) يتقاطعان في النقطة p . بين ان إحداثيتي p هي

$$y = \frac{2}{e^m + e^{-m}} \text{ و } x = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

4. لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$.

أ. اوجد بدلالة m إحداثيتي النقطة I .

ب. اوجد المحل الهندسي للنقطة I لـ m يسمح \mathbb{R} .

ج. ارسم مجموعة النقط I في نفس المعلم السابق.

✓ الحل

1. (γ_2) هو نظير (γ_1) بالنسبة إلى محور الترتيب

$$(T_1): y = e^m(x - m) + e^m$$

$$(T_2): y = -e^{-m}(x - m) + e^{-m}$$

$$(T_2) \text{ ميل } \times (T_1) \text{ ميل} = (-e^{-m}) \times e^m = -1$$

ومنه (T_1) و (T_2) متعامدان

$$\text{لدينا } e^m(x - m) + e^m = -e^{-m}(x - m) + e^{-m} \text{ و}$$

$$(e^m + e^{-m})x = me^m - e^m + m e^{-m} + e^{-m}$$

$$\text{إذن } x = \frac{m e^m - e^m + m e^{-m} + e^{-m}}{e^m + e^{-m}} = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

$$\text{بالتعويض } x \text{ في عبارة } y \text{ نجد } y = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

بإضافة 1 إلى أطراف المتباينة $-1 < \alpha < 1$ نجد $0 < 1 + \alpha < 2$ إذن $f(\alpha) > -1$

3. معادلة الماس لـ (γ) عند الصفر هي $(d): y = \frac{1}{2}x$

- دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{2}x = \frac{x e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x e^x}{1 + e^x} = \frac{\frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}x}{1 + e^x} = \frac{\frac{1}{2}x(e^x - 1)}{1 + e^x}$$

إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ من إشارة القدار $\frac{1}{2}x(e^x - 1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{2}x$	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f(x) - \frac{1}{2}x$	+	0	+

من الجدول المجاور نستنتج أن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

$$f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0$$

أي للنحني (γ) يقع فوق المستقيم (d) و يمسّه في النقطة $O(0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{1 + e^x} = 0$$

النحني (γ) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - x - x e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

إذن فالمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$

$$f(x) - x = \frac{x e^x}{1 + e^x} - x = \frac{x e^x - x - x e^x}{1 + e^x} = \frac{-x}{1 + e^x}$$

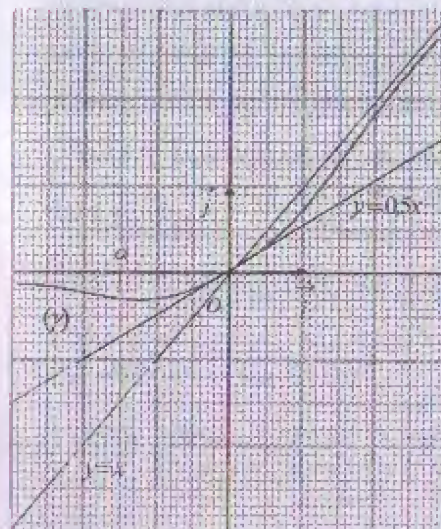
- إذا كان $x > 0$ فإن $f(x) - x < 0$

ومنّه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) .

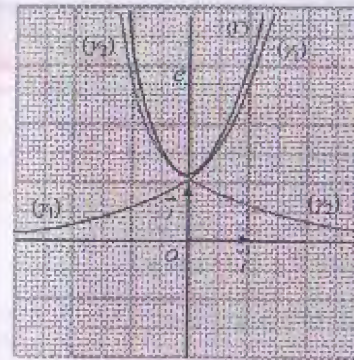
- إذا كان $x < 0$ فإن $f(x) - x > 0$

ومنّه (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) .

المستقيم (Δ) يقطع (γ) في النقطة $O(0, 0)$.



x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f		0	$f(\alpha)$



$$y_1 = \frac{e^m + e^{-m}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{x_M + x_N}{2} = m \quad (14)$$

$$I\left(m, \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right) \text{ إذن}$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ نضع } m = x \text{ نجد}$$

h	$-\infty$	0	$+\infty$
$H(x)$ إشارة	-	0	+
h تغيرات	$+\infty$	1	$+\infty$

إذن المحل الهندسي للنقطة I هي المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

المشتقات المتتالية والمتتاليات

تطبيق 23

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ f حيث $n \geq 1$

(1) عين $f^{(2)}$ و $f^{(3)}$

(2) بين بالزرايع أنه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = 2^n (1-n-2x)e^{2x}$

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، التمثيل البياني لـ $f^{(n)}$ يقبل

مماسا أفقيا في النقطة M_n .

(1) عين x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n وتحقق أن M_n تنتمي إلى المنحني (γ)

ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4x}$

(ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية، ما هي نهايتها ؟

(ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها.

✓ الحل

$$f^{(1)}(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = e^{2x}(-2+2-4x) = e^{2x}(-4x) = 2(-2x)e^{2x} \quad (1)$$

$$f^{(2)}(x) = (f^{(1)})' = 2e^{2x}(-4x) - 4e^{2x} = e^{2x}(-4-8x) = 2^2(-1-2x)e^{2x}$$

$$f^{(3)}(x) = (f^{(2)})' = 2e^{2x}(-4-8x) + (-8)e^{2x} = e^{2x}(-16-16x) = 2^3(-2-2x)e^{2x}$$

(2) نسمي P_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = 2^n (1-n-2x)e^{2x}$ "

P_1 صحيحة لأن $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x}$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم n

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = [2e^{2x} + 2e^{2x}(1-n-2x)]2^n = e^{2x}(-2+2-2n-4x) \times 2^n \\ &= 2^{n+1}e^{2x}(-n-2x) = 2^{n+1}e^{2x}(1-(n+1)-2x) \end{aligned}$$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه P_n صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

$$(1) \quad f^{(n+1)}(x) = 0 \text{ يكافئ } -n-2x = 0 \text{ يكافئ } x = \frac{-n}{2}$$

$$\text{إذن } x_n = x = \frac{-n}{2}$$

$$y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(1-n-n)e^{-n} = 2^n \times e^{-n}$$

$$\text{إذن } x_n = \frac{-n}{2} \text{ و } y_n = 2^n \times e^{-n}$$

$$\text{نضع } x_n = x \text{ و } y_n = y \text{ نجد } n = -2x \text{ و } y = 2^{-2x}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4^x}$$

$$\text{إذن } M_n \text{ تنتمي إلى المنحني ذي المعادلة } y = \frac{e^{2x}}{4^x}$$

$$(ب) \text{ بما أن } x_{n+1} - x_n = -\frac{(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{فإن } (x_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } -\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$$

$$(ج) \text{ بما أن } y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n \text{ فإن } (y_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{e} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

تطبيق 24

حساب نهاية متتالية باستعمال الدوال

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرف على $[0, 1]$ الدالة f بـ

$$f(x) = e^{-x} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right]$$

(1) أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل x من I يكون $f'(x) \geq 0$

(2) استنتج أن $f(1) \geq f(0)$

(3) باستعمال تغيرات g المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

$$\text{بين أن } f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$$

$$(4) \text{ استنتج أن } e \left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$$

$$(5) \text{ بين أن } 0 \leq e - P_n \leq \frac{3}{n!} \text{ حيث } P_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

(7) حتى يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$ يجب أن يكون $\frac{3}{n!} \leq 10^{-4}$

بما أن $\frac{3}{n!} \leq \frac{3}{2^{n-1}}$ فإن $\frac{3}{2^{n-1}} \leq 10^{-4}$ حيث $2^{n-1} \geq 3 \times 10^4$

ومنه ينتج $(n-1) \ln 2 \geq \ln(3 \times 10^4)$

إذن $n \geq \frac{\ln(3 \times 10^4)}{\ln 2} + 1$ أي $n \geq 15,80$

وبالتالي قيمة n_0 هي $n_0 = 16$.

تطبيق 25

حل معادلات تفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية (E) ... $y' = y(1-y)$. نريد إيجاد حلول (E) التي لا

تعتمد على \mathbb{R} لذلك نضع $z = \frac{1}{y}$

(1) تحقق أن $z' = -z + 1$... (E')

(2) بين أن حلول (E) هي السؤال $x \mapsto 1 + ce^{-x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$

(3) استنتج حلول المعادلة (E).

الحل

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y} = 1 - z \quad (1)$$

(2) حلا للمعادلة (E') يعني أن $f'(x) = -f(x) + 1$

$$f'(x) = -ce^{-x} + 1 - 1 = -(1 + ce^{-x}) + 1 = -f(x) + 1$$

إذن $x \mapsto 1 + ce^{-x}$ حلا للمعادلة (E').

$$z = \frac{1}{y} \quad \text{منه} \quad y = \frac{1}{z} \quad \text{إذن} \quad y = \frac{1}{1 + ce^{-x}} \quad (3)$$

تطبيق 26

حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' + ay = f(x)$

لتكن (E) معادلة تفاضلية بحيث $y' + 4y = 3xe^{2x}$ و لتكن (E') معادلة

تفاضلية $y' + 4y = 0$

(1) حل المعادلة (E')

(2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على \mathbb{R}

بـ $g(x) = (ax + b)e^{2x}$ حلا خاص للمعادلة (E).

(6) عين نهاية المتتالية (V_n) .

(7) عين n_0 بحيث من أجل $n \geq n_0$ يكون $e - V_n \leq 10^{-4}$

استعمل المتباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

الحل

$$f'(x) = e^{-x} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right] + \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] (-e^{-x}) = e^{-x} \left[\frac{x^n}{n!} \right] \quad (1)$$

$$1 \geq x^4 \geq 0 \quad (2) \quad , \quad 1 \geq e^{-x} \geq \frac{1}{e} \quad (1)$$

بالضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد $1 \geq e^{-x} x^n \geq 0$

$$1 \geq e^{-x} x^n \geq 0 \quad (4) \quad , \quad 1 \geq \frac{1}{n!} > 0 \quad (3)$$

بالضرب حدود المتباينتين (3) و (4) طرفا لطرف نجد $1 \geq \frac{e^{-x} x^n}{n!} \geq 0$ أي $1 \geq f'(x) \geq 0$

(2) بما أن $f'(x)$ موجب على I فإن f متزايدة تماما على I وعليه $f(1) \geq f(0)$

$$(3) \quad \text{لدينا} \quad g'(x) = \frac{1}{n!} (e^{-x} x^n - 1)$$

بما أن $0 \leq e^{-x} x^n - 1 \leq 0$ فإن $-1 \leq g'(x) \leq 0$ وبالتالي $g'(x) < 0$

إذن g متناقصة تماما على I وعليه $g(1) < g(0)$

$$f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!} \quad \text{أي} \quad f(1) - \frac{1}{n!} \leq f(0) \quad \text{نعني} \quad g(1) < g(0)$$

$$-1 \leq -e^{-1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq -1 + \frac{1}{n!} \quad \text{ومنه نجد} \quad f(0) \leq f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!} \quad (4)$$

بضرب حدود هذه المتباينة في $-e$ نجد $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \geq e \left(1 - \frac{1}{n!} \right)$

$$V_n = 1 + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (5)$$

بما أن $V_n \leq e$ فإن $e - V_n \geq 0$

لدينا من السؤال الرابع المتباينة $V_n \geq e \left(1 - \frac{1}{n!} \right)$ بضرب طرفيها في -1 نجد :

$$e - V_n \leq e \left(-1 + \frac{1}{n!} \right) \quad \text{و بإضافة} \quad e \quad \text{إلى طرفي هذه الأخيرة نجد} \quad e - V_n \leq \frac{e}{n!} \leq \frac{3}{n!}$$

$$\frac{3}{n!} \geq e - V_n \geq 0 \quad \text{إذن}$$

$$(6) \quad \text{بما أن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n!} = 0 \quad \text{فإن حسب نظرية الحصر نجد} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - V_n) = 0$$

$$\text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = e$$

✓ الحل

(1) $y' + 4y = 0$ يكافئ $y' = -4y$ و حلها العام هو $y = \lambda e^{-4x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) g حلا للمعادلة (E) هذا معناه ان $g'(x) + 4g(x) = 3xe^{2x} \dots (1)$

$g'(x) = a e^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax+a+2b)$

$g'(x) + 4g(x) = e^{2x}(2ax+a+2b+4ax+4b) = e^{2x}(3ax+a+3b) \dots (2)$

من (1) و (2) نجد $a+6b=0$ و $6a=3$ ومنه ينتج $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{12}$.

اذن $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\right)e^{2x}$



تطبيق 27

حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' + y = f(x)$

(1) نريد حل المعادلة التفاضلية (E) $y' + y = x+1$ حيث y دالة عددية ذات

المتغير x و y' مشتقتها

(1) نضع $z = y - x$ نكتب المعادلة التفاضلية (E) بدلالة z ولتكن (F).

(ب) حل المعادلة (F) ثم (E).

(2) نسمي f_α حل للمعادلة (E) بحيث $f_\alpha(0) = \alpha$ و f_α التمثيل البياني

للدالة f_α حيث α عدد حقيقي معطى.

(أ) ادرس تغيرات f_α في كل حالة من الحالات $\alpha < 0$ ، $\alpha = 0$ ، $\alpha > 0$.

(ب) بين انه من اجل كل α ، المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1

يمر من النقطة $O(0,0)$.

(ج) بين ان كل المماسات للمنحنيات (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة بطلب تعيينها مع $\alpha \neq 0$.

✓ الحل

(1) $z' = y' - 1$ ومنه $y' = z' + 1$

اذن (E) تكتب $z' + 1 + z + x = x + 1$ اي $z' + z = 0$ ومنه $z' + z = 0$: (F)

(ب) الحل العام للمعادلة (F) هو $z = \lambda e^{-x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

وبالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو $y = \lambda e^{-x} + x$

$f_\alpha(0) = \alpha$ يكافئ $\lambda e^0 + 0 = \alpha$ اي $\lambda = \alpha$

اذن $f_\alpha(x) = \alpha e^{-x} + x$

(1) $f'_\alpha(x) = -\alpha e^{-x} + 1 = \frac{-\alpha + e^x}{e^x}$

- في حالة $\alpha > 0$ لدينا $f'_\alpha(x) = 0$ يكافئ $\alpha = e^x$ يكافئ $x = \ln(\alpha)$

إذا كان $\ln(\alpha) > 0$ فإن $f'_\alpha(x) > 0$ وإذا كان $\ln(\alpha) < 0$ فإن $f'_\alpha(x) < 0$

- في حالة $\alpha < 0$ يكون $f'_\alpha(x) > 0$ منه f_α متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$\ln \alpha$	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$	-	0	+
تغيرات f_α	$+\infty$	$1 + \ln \alpha$	$+\infty$

حالة $\alpha > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$		+	
تغيرات f_α	$-\infty$		$+\infty$

حالة $\alpha < 0$

في حالة $\alpha = 0$ يكون $f'_\alpha(x) = 1$ ومنه $f_\alpha(x) = x$

(γ_0) في هذه الحالة هو مستقيم معادلته $y = x$

(ب) المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو $y = (-\alpha e + 1)x$

ومنه هذا المماس يمر من المبدأ $O(0,0)$.

(ج) المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معادلته هي

$$y = \left(\frac{-\alpha + e^{x_0}}{e^{x_0}} \right) (x - x_0) + \alpha e^{-x_0} + x_0$$

المماسات تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة هذا معناه المعادلة

$$x = \left(\frac{-\alpha + e^{x_0}}{e^{x_0}} \right) (x - x_0) + \alpha e^{-x_0} + x_0 \dots (*)$$

من (*) نجد $x = x_0 + 1$ ومنه $y = x = x_0 + 1$

اذن كل المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة

$M_0(x_0 + 1, x_0 + 1)$ مستقلة عن α .

تطبيق 28

حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'' + \omega y' = 0$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $f'' + 4f' = 0$

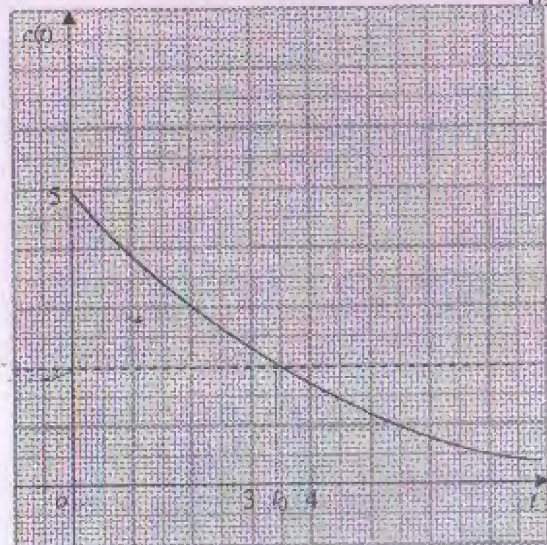
(1) بوضع $g = f'$ بين ان g حلا للمعادلة (E') $g' + 4g = 0$ ثم حل (E').

(2) استنتج ان حلول (E) هي الدوال $\frac{a}{4} e^{-4x} + b$ مع a و b عدنان

حقيقيان كفيين.

(3) من بين الحلول f عين الحل الذي يحقق $f(0) = 0$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$

إن ثابت التخلص الجسم من الدواء هو معامل التناسب بين سرعة التخلص و التركيز في لحظة t وبما أن التركيز يتناقص فإن العامل يكون سالبا أي $(-0,25)$ وعليه $C'(t) = -0,25 C(t)$



والحل العام للمعادلة (E) هو $C(t) = \alpha \times e^{-0,25t}$ حيث α عدد حقيقي. لما $t=0$ فإن $C(0)=5$ ومنه $\alpha \times e^0 = 5$ أي $\alpha = 5$ إذن $C(t) = 5 e^{-0,25t}$ بما أن $C'(t) = -1,25 e^{-0,25t}$ فإن $C'(t) < 0$ وبالتالي الدالة C متناقصة تماما على $[0, +\infty[$ و إليك جدول تغيرات C

t	0	$+\infty$
$C'(t)$	-	-
$C(t)$	5	0

نضع $g(t) = C(t) - 2$ ومن المتبانية $C(t) < 2$ نجد $t \geq 3,66$

بما أن $g'(t) < 0$ و $g(t) = 0$ فإن المعادلة $g(t) = 0$ لها حل وحيد t_0 حيث $t_0 > 3,66$ باستعمال طريقة المسح بخطوة قدرها 0,01 نحصل على الجدول التالي.

t	$g(t)$
3,66	0,00258
3,67	-0,0024

إذن $t_0 \in (3,66, 3,67)$

تطبيق 30 دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق. يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا والقدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا.

لتكن $N(t)$ عدد البكتيريا في اللحظة t (معر عنها بالساعات).

الملاحظات المستخلصة قادتنا إلى نمذجة هذه الحالة بمعادلة تفاضلية

$$N'(t) = 0,07 N(t) (1 - 10^{-3} N(t))$$

✓ الحل

(1) بما أن $g = f'$ فإن $f'' = f'$ و بتعويض f' و f'' في (E) نجد $g' + 4g = 0$ أي g حلال (E).

الحل العام للمعادلة (E) $g(x) = a e^{-4x}$ حيث a عدد حقيقي.

(2) حتى تكون f حلا للمعادلة (E) يجب أن يكون $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = (-4) \left(-\frac{1}{4} \right) e^{-4x} = a e^{-4x} = g(x)$$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة بـ $f(x) = -\frac{a}{4} e^{-4x} + b$

(3) $f(0) = 0$ يكافئ $-\frac{a}{4} + b = 0$ ومنه $b = \frac{a}{4}$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \text{ يكافئ } -\frac{a}{4} e + b = 2 \text{ (1)}$$

بتعويض قيمة b في (1) نجد $-\frac{a}{4} e + \frac{a}{4} = 2$ أي $-\frac{a}{4}(e-1) = 2$

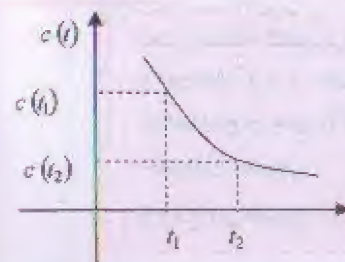
ومنه $a = \frac{8}{-(e-1)}$ و $b = \frac{2}{1-e}$ إذن الدالة المطلوبة هي $x \mapsto \frac{-2}{1-e} e^{-4x} + \frac{2}{1-e}$

تطبيق 29 التناقص الأسّي لتركيز الدواء في الدم

ليكن $C(t)$ التركيز بـ (mg/l) لدواء في الدم بدلالة الزمن t حيث t معبر عنه بالساعات. سرعة التخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة. ثابت التخلص يساوي 0,25. التركيز الابتدائي هو $5 mg/l$.

1. بزر المساواة $C'(t) = -0,25 C(t)$ ثم اوجد عبارة $C(t)$.
2. ادرس تغيرات C واحسب نهاية $C(t)$ عند $+\infty$ ثم ارسم بيان الدالة C .
3. اعط حضرا بتقريب 0,01 للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t) < 2$.

✓ الحل



$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} = V_E(t_2) \quad (1)$$

$V_E(t_2)$ هي سرعة التخلص الدم من الدواء في اللحظة t_2 .

سرعة التخلص V_E هي مشتقة التركيز $C(t)$ أي $C'(t) = V_E$

نضع $P(t) = \frac{1}{N(t)}$ مع $N(t) \neq 0$

- (1) بين أن المعادلة التفاضلية $P' = -0,07P + 7 \times 10^{-5}$ تحقق للمعادلة التفاضلية
- (2) استنتج عبارة $P(t)$ ثم $N(t)$ بدلالة t .
- (3) ما هو عدد البكتيريا بعد 40 ساعة ؟
- (4) ما هو الوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتيريا يمثل 80 % من الاستيعابية العظمى لهذا الوسط ؟

✓ الحل

$$P' = \frac{-N'(t)}{N^2(t)} = \frac{-0,07N(t)(1-10^{-3} \times N(t))}{N^2(t)} = \frac{-0,07(1-10^{-3}N(t))}{N(t)} \quad (1)$$

$$P' = -\frac{0,07}{N(t)} + 0,07 \times 10^{-3}$$

$$P' = -0,07P + 7 \times 10^{-5} \quad (2)$$

وبما أن $P(0) = \frac{1}{100}$ فإن $10^{-3} + c = \frac{1}{100}$ وبالتالي $c = 9 \times 10^{-3}$

لأن $P(t) = \frac{1000}{1+9 \times e^{-0,07t}}$ و $P(t) = 10^{-3}(1+9e^{-0,07t})$

(3) بما أن $N(40) = 647$ فإن بعد 40 ساعة عدد البكتيريا يصبح 647.

(4) 80 % من البكتيريا يعادل 800 بكتيريا

$N(t) = 800$ يكافئ $t = 51,19$

إذن عدد الساعات هي تقريبا 51 ساعة.

تطبيق 61: تحول الآزوت بالهواء الجوي إلى الكربون المشع

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الآزوت و التي يفعل الإشعاعات الكونية تتحول إلى مادة الكربون المشع (C^{14})، و تحتوي الكائنات الحية على هذه المادة التي تتجدد على الدوام. وعند موتها فإن مادة الكربون C^{14} تتحلل تدريجيا (تتناقص في الوسط).

لعرفة زمن وفاة كائن نقوم بقياس نسبة الكربون C^{14} المتبقية في جسمه. لتكن $N(t)$ عدد ذرات C^{14} المتواجدة في اللحظة t الحرة عنها بالأعوام في عينة من مادة عضوية.

بين الفيزيائيون أن المعادلة $N' = -k \times N(t)$ تحقق للمعادلة N' من أجل

كل عدد حقيقي موجب t حيث $k = 1,245 \times 10^{-4}$ و $N(0) = N_0$.
نقول أن سرعة تحلل C^{14} متناسبة مع عدد ذرات C^{14} المتواجدة في تلك اللحظة

- (1) أوجد $N(t)$ بدلالة N_0 و t .
- (2) ما هي نسبة ذرات الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة ؟
- (3) نسمي نصف حياة الكربون C^{14} الزمن المطلوب لاستحالة نصف عدد ذرات C^{14} .

(أ) برر العلاقة $N(t+T) = \frac{1}{2}N(t)$ حيث T هو نصف حياة C^{14} .

(ب) استنتج أن $T = \frac{\ln(2)}{k}$ معينا قيمة نظريية له.

- (4) قام علماء الآثار بتحليل شظايا لعظام وجدت في كهف، فوجدوا نسبة الكربون C^{14} الموجودة في هذه العظام تمثل 20 % من نسبة الكربون C^{14} الموجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة أوحد عمر شظايا العظام.

✓ الحل

(1) الحل العام للمعادلة $N'(t) = -k \times N(t)$ هو $N(t) = \lambda e^{-kt}$

بما أن $N(0) = N_0$ فإن $\lambda e^0 = N_0$ ومنه $\lambda = N_0$ إذن $N = N_0 e^{-kt}$

(2) كمية الكربون في اللحظة $t = 10000$ سنة هي $N_1 = N_0 e^{-k \times 10000}$

نسبة الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة هي $\frac{N_1 - N_0}{N_0}$

$$\frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{N_0 e^{-k \times 10000} - N_0}{N_0} = e^{-k \times 10000} - 1 = -0,712$$

إذن نسبة الكربون المفقودة خلال 10000 سنة هي 71,2 %.

(3) $N(t+T) = N_0 e^{-k(t+T)} = N_0 e^{-kt} \times e^{-kT} = N(t) \times e^{-kT}$ (أ)

بما أن $N(T) = \frac{1}{2}N_0$ فإن $N_0 e^{-kT} = \frac{1}{2}N_0$ أي $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

لأن (*) $N(t+T) = N(t) \times \frac{1}{2}$... (*)

(ب) بوضع $t = 0$ العلاقة (*) تصبح $N_0 e^{-kT} = N_0 \times \frac{1}{2}$ ومنه نستنتج أن $e^{-kT} = \frac{1}{2}$

من المساواة $e^{-kT} = \frac{1}{2}$ نجد $T = \frac{\ln(2)}{k}$ يتعويض قيمة k نجد $T \approx 5567,45$

أي تقريبا 5568 سنة.

(4) لدينا 20 % $\frac{N(t)}{N_0} = 0,20$ ومنه $N(t) = N_0 \times 0,20$

$N_0 e^{-kt} = N_0 \times 0,2$ تكافئ $e^{-kt} = 0,2$ يكافئ $-kt = \ln(0,2)$

ومنه نجد $t = \frac{\ln(0,2)}{-k}$ وبالحساب نجد $t \approx 12927$

تمارين و مسائل

1-

حل المعادلات التالية :

- (1) $e^{x-3}=1$ ، (2) $e^{4x^2+6}=e^{14x}$ ، (3) $e^x - e^{-2x} = 0$
 (4) $(e^{-2x} - e)(e^{6x} + 5) = 0$ ، (5) $\ln(e^x - 4) = 5$ ، (6) $\frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{3e^x - 2} = 1$
 (7) $e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} - 5 = 0$ ، (8) $e^{2x} = 2e^{-x}$ ، (9) $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$
 (10) $e^{-x} + e^x + 2 = 0$ ، (11) $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+3}$

2-

- (1) عين جذور كثير الحدود $P(x) = 2x^2 + 9x - 5$ حيث $P(x)$ مستنتجا تحليلاً له.
 (2) ادرس إشارة كل من $(e^x + 5)$ و $(2e^x - 1)$
 (3) باستعمال الأسئلة السابقة حل التراجحة $2e^{2x} + 9e^x - 5 > 0$

3-

حل المعادلات و التراجحات التالية :

- (1) $2 - e^x \geq 0$ ، (2) $e^{2x^2-1} \geq 3$ ، (3) $(e^x)^2 \leq 4$
 (4) $e^x - 2e^{-x} < 0$ ، (5) $(e^x - 1)e^x \geq 2(e^x - 1)$ ، (6) $3e^{2x} + e^x - 4 < 0$
 (7) $\frac{e^x - 3}{e^{2x} + 3} \leq \frac{e^x - 4}{e^x + 4}$ ، (8) $e^{x+1} > 2^x$ ، (9) $e^{|x-1|} \geq 1$ ، (10) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 > 0$
 (11) $2^{x+2} - 10 \times 2^{x+1} + 12 = 0$ ، (12) $3^x + 2 \times 3^{-x-1} = 7$ ، (13) $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

4-

حل في \mathbb{R}^2 الجمل التالية :

- (1) $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e^y} = 1 \\ \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2} \end{cases}$ (ب) ، $\begin{cases} e^{x+y} + e^{xy} = 2e^4 \\ x^2 y = 14 \\ e^x e^y = e \end{cases}$ (ج)

5-

احسب نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

- (1) $f(x) = x + 3 + xe^x$ (ب) ، $f(x) = x + 2 + \frac{5}{e^x + 1}$ (ج) ، $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$
 (د) $f(x) = \frac{5x - 2}{e^x + 2}$ (هـ) ، $f(x) = \frac{e^x}{x - 2}$ (و) ، $f(x) = \frac{3x + 1}{x} e^x$

6-

ادرس نهاية الدالة f في المكان المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

- (1) $f(x) = \frac{e^x - 2}{3x}$ عند 0 (ب) ، $f(x) = 5xe^{-x}$ عند $+\infty$
 (ج) $f(x) = \frac{3e^x - 3}{3x - 3}$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ (د) ، $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ عند $(+\infty)$
 (هـ) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
 (و) $f(x) = \frac{x+1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$
 (ي) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x + 3\sqrt{x}}$ عند 0 (ف) ، $f(x) = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{4x^2}$ عند 0

7-

f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = 20x - 600 - e^{-0.5x+1}$
 (1) عين نهاية f عند $(+\infty)$.

- (2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 20x - 600$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f وليكن (γ)
 (3) ادرس الوضعية النسبية لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

8-

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x - 1 - 2e^x$

- (1-1) ادرس نهاية f عند $(-\infty)$
 (ب) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل لـ f .
 (2) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) .

- (3) بين أنه نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = e^x \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 2 \right)$
 ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$.

9-

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \ln(e^x + 2)$ و (γ) منحناها البياني في معلم.

- (1) ادرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- (2) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$ ثم استنتج أن (γ) يقبل مستقيماً مقارباً مانلاً (d) في جوار $(+\infty)$.
(3) أدرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) .

-10-

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال المعطاة مع تعيين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

$$(1) f(x) = x^3 e^x \quad (2) f(x) = \frac{e^x}{x-2}$$

$$(3) f(x) = 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (4) f(x) = (3x + 5)e^x$$

$$(5) f(x) = (\sin x)e^x \quad (6) f(x) = (-3x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$(7) f(x) = e^{-x} - \sqrt{x+2} \quad (8) f(x) = e^{x^2+3x+2}$$

$$(9) f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x+3} \quad (10) f(x) = \frac{3x+1}{e^{x+2}}$$

$$(11) f(x) = (\cos x)e^{\frac{1}{x}} \quad (12) f(x) = (x-1)e^{x^2}$$

-11-

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة f والمجموعة التي تكون فيها f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

$$(1) f(x) = e^{\cos x} \quad (2) f(x) = e^{\frac{1}{1+x}} \quad (3) f(x) = e^{x+|x|}$$

$$(4) f(x) = e^{x+\sin x} \quad (5) f(x) = \ln(e^x + |x|) \quad (6) f(x) = \frac{e^{-|x|}-2}{e^x}$$

-12-

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (2-x)e^x$ ما مصداقية المعلومات التالية ؟
(1) جدول تغيرات f هو ،

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
تغيرات f		↗ ↘	
	0	e	$-\infty$

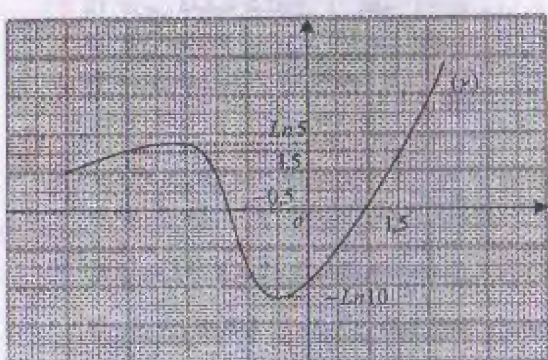
- (2) من أجل كل عدد حقيقي $m > 0$ و $m \neq e$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلان أو ولا حل
(3) المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى الممثل لـ f .

-13-

- f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ وليكن (γ) منحنها البياني في معلم متعامد ومتجانس A نقطة إحداثيها $(\ln(2), \ln(2))$
(1) أوجد a و b بحيث (γ) يمر من A و يقبل عندها مماساً موازياً لمحور القواصل.
(2-1) أدرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال (1).
(ب) أرسم (γ) و المماس عند A .

-14-

f دالة معرفة على $[-4, +\infty[$ و منحنها البياني (γ) في معلم متعامد ومتجانس



- (1) شكل جدول تغيرات f .
(2) عين تغيرات الدالة g المعرفة بـ $g(x) = e^{f(x)}$
(ب) عين صور الأعداد $-2, -4, -1, 0, \frac{1}{2}$ بالدالة g
(ج) ما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟

(3) أرسم المنحنى البياني للدالة g في المعلم السابق

- (4) حل بيانياً المعادلة $f(x) = 0$ ثم للمزاحة $f(x) \geq \frac{3}{2}$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $g(x) = 1$ و حلول المزاحة $g(x) \geq e\sqrt{e}$.

-15-

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2e^x - x - 2$

- (1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ثم شكل جدول تغيرات f .
(2) استنتج من السؤال (1) أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلان α و β بحيث $-1, 5 \geq \alpha \geq -1, 6$
(3) عين إشارة $f'(x)$ حسب قيم x .

-16-

أدرس تغيرات الدوال التالية ،

$$(1) f(x) = x e^{x^2} - 2 \quad (2) f(x) = x - 2 + e^x \quad (3) f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 3}$$

- (1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$
- (2) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x)=0$.
- (3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ)
- (4) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $e^{2x}-e^x-2-m=0$ جبريا و بيانيا.

- (1) دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ ب $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})
- (1) عين نهاية f عند -1 و $(+\infty)$ ثم ماذا تستنتج حول المنحني (γ) ؟
- (2) احسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]-1, +\infty[$ و بين ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-1}{x+1}$
- (3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم المنحني (γ) .

- (1) دالة معرفة على \mathbb{R} ب $f(x)=(x-e)e^{-x}+1-x$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})
- (1) عين نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$
- (2) احسب $f'(x)$ و بين ان لدينا $f'(x)=e^{-x}h(x)$ حيث h دالة يطلب تعيينها.
- (3-1) ادرس حسب قيم x إشارة $e-x$ ثم استنتج ان إذا كان $x > 1$ فإن $1-x+e^{-x} < 0$ و $x < 1$ فإن $1-x+e^{-x} > 0$
- (ب) شكل جدول تغيرات f مستنتجا ان $f(x)$ دوما سالبة.
- (4-1) بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) .
- (ب) بين انه توجد نقطة وحيدة A من (γ) بحيث المماس لـ (γ) عندها يوازي (d) .

- (1) دالة معرفة على مجال $]0, +\infty[$ ب $f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
- (1) دالة معرفة على $]1, +\infty[$ ب $g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$
- (1) ما هي نهاية $g(x)$ لـ x يؤول إلى 1 ؟

- (4) $f(x)=\frac{x-3}{e^x}$
- (5) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$
- (6) $f(x)=x-2+e^{-x}$
- (7) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+2}$
- (8) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

- (17) f دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & , x \leq 1 \\ f(x)=1+\ln x & , x > 1 \end{cases}$
- (1) (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
- (1) هل f مستمرة عند $x_0=1$ ؟
- (2) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.
- (3) عين معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,1)$
- (4) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) .

- (18) f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ ب $f(x)=(2-x)e^x-1$ و (γ) منحناها البياني.
- (1) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) ارسم (γ) في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})
- (3) بين ان المعادلة $f(x)=0$ ثقيل حلا وحيث α بحيث $2 \geq \alpha \geq 1$ ثم عين قيمة تقريبية لـ α بتقريب 0,01
- (4) ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

- (19) g دالة معرفة على \mathbb{R} ب $g(x)=xe^x-1$
- (1-1) ادرس تغيرات g ثم استنتج انه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $\alpha e^\alpha=1$
- (ب) اعط حصر لـ α بتقريب 0,1.
- (2) لتكن f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب $f(x)=e^x-\ln x$
- (1) تحقق انه من أجل كل $x > 0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$
- (ب) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

- (20) f دالة معرفة على \mathbb{R} ب $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

تنتمي على التوالي إلى محور القواسم ، للمستقيم (d) و المنحني (γ) ، وليكن U_n عدد

$$U_n = \frac{C_n A_n}{A_n B_n}$$

$$U_n = \frac{2n-5-f(n)}{2n-5} \quad n \geq 3 \text{ لدينا}$$

(ب) ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

(ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) لا $+\infty \leftarrow n$ هل نستطيع تكهن هذه النتيجة من قبل ؟

$$f(x) = e^{-x} \sin 2x \text{ دالة معرفة بـ}$$

(1) احسب $f'(x)$.

(2) بين أن حلول $f'(x) = 0$ تمثل متتالية حسابية وأن صورها بالدالة f تشكل متتالية هندسية.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}, \quad x \neq -1 \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

(1) ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق f عند -1 .

(2) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)e^{\frac{x+1}{x+3}} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{\sin x}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1}-1}{(\sin x)^3} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{e^x} - e^{x+1} \right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - e^x + 1}{x^2} \quad (4)$$

$$f(x) = x^2 e^x \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

(1) $f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... هي مشتقات متتالية لـ f من $n \geq 1$.

(2) بين بالتراجع أنه من أجل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + \alpha_n x + \beta_n)$ حيث α_n و β_n عددا حقيقيان يطلب تعيينهما.

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2 \\ \beta_{n+1} = \beta_n + \alpha_n \end{cases} \text{ تحقق أن}$$

(ب) احسب $g'(x)$ من أجل كل x .

(ج) حل المتراجحة $0 < 1 - \ln(x-1)$ على $]1, +\infty[$

(د) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(هـ) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α على المجال $[e+1, e^3+1]$ و ادرس

إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

$$h(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x} \text{ لتكن دالة معرفة على }]1, +\infty[\text{ بـ}$$

(1) عين نهاية $h(x)$ لا $+\infty \leftarrow x$ و بين أن نهاية $h(x)$ لا $+\infty \leftarrow x$ تساوي 0

(ب) احسب $h'(x)$ و بين أن $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1, +\infty[$

(ج) بين أن h متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{\alpha}, 1]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha}, +\infty[$

(3-1) تحقق أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = h(e^x)$

(ب) - استنتج نهاية $f(x)$ لا $+\infty \leftarrow x$ و لا $+\infty \leftarrow x$ يؤول إلى 0

- استنتج اتجاه تغير f على المجال $]0, +\infty[$

- استنتج أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $\ln(\sqrt{\alpha})$ ثم ارسم (γ) .

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7 \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ}$$

(1) ادرس نهاية g عند $-\infty$ و $+\infty$

(2) ادرس اتجاه تغير g على \mathbb{R} مشكلا جدول تغيراتها.

(3-1) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,94, 0,941[$

(ب) عين إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(11) دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) ادرس إشارة $f(x)$ على \mathbb{R}

(2) ادرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

(3) احسب $f'(x)$ و تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة مشكلا جدول تغيرات f .

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} \text{ (1) بين صحة المساواة التالية}$$

$$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7} \text{ ادرس اتجاه تغير الدالة } h \text{ المعرفة بـ على المجال } \left] -\infty, \frac{5}{2} \right[$$

(ج) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 0,01.

(د) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مغارب لـ (γ) عند $(+\infty)$ محددا وضعية

(γ) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (d) و (γ) في نفس المعلم.

(III) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ نعتبر النقط A_n ، B_n و C_n ذات الفاصلة n .

- (4) تحقق أن (α_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين α_n بدلالة n .
 (5) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\beta_n = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_2 + \alpha_1$ ثم احسب β_n بدلالة n .

29

(E) معادلة تفاضلية $2y' + 3y = 0 \dots (E)$

(1) عين كل حلول المعادلة (E).

(2) (E') هي المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$

(أ) عين f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية حلا لـ (E') .

(ب) بين أنه إذا كانت g حلا لـ (E') فإن $g - f$ حلا لـ (E) والعكس صحيح.

(ج) أوجد كل حلول المعادلة (E') .

(3) أوجد كل حلول المعادلة $2y' + 3y = \cos x$

(البحث عن الحل من الشكل $h(x) = a \cos x + b \sin x$)

30

عين الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة :

(أ) $y' = -3y$ و $f(0) = 2$ ، (ب) $2y' + 5y = 0$ و $f(1) = 0$

(ج) $y - 2y' = 0$ و $f'(1) = 1$ ، (د) $y' = -3y + 1$ و $f(1) = 0$

31

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y' = -y + 4$

(1) عين الحل f لـ (E) بحيث $f(0) = 2$

(2) أرسم المنحنى للمثل لـ f على $[0, 2]$ في معلم متعامد ومتجانس.

(3) أرسم في نفس المعلم تمثيلا مقربا لبيان f بواسطة طريقة أولر.

32

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y' - 3y = +2$

بين صحة أو خطأ كل قضية من القضايا التالية :

(1) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ce^{3x} + 2$ مع $c \in \mathbb{R}$ حلولا لها.

(2) الحل الخاص لـ (E) بحيث $f(0) = 2$ هو $f(x) = \frac{1}{3}(5e^{3x} - 2)$

(3) الحل الخاص g للمعادلة (E) الذي منحناه البياني يقبل مماسا معامل توجيهه

عند النقطة ذات الإحداثيات 0 يعرف بـ $g(x) = -\frac{2}{3} + e^{3x}$

(4) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ce^{3x} + 2x$ كحلول لها.

33

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = x + 1$

نبحث عن الحل g للمعرف بـ $g(x) = ax + b$ للمعادلة (E)

(1) بين أنه إذا كانت g حلا لـ (E) فإنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون :

$ax + a + b = x + 1$ عندئذ عين a و b .

(2) تحقق أن الدالة g المتحصل عليها هي حل لـ (E).

(3) بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $f - g$ حلا لـ $y' + y = 0 \dots (E')$

(4) حل المعادلة (E') ثم (E).

34

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

(أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ حلا للمعادلة (E)

(1-2) حل المعادلة (E') ... $y' + y = 0$.

(ب) بين أن الدالة f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $f - g$ حلا لـ (E)

(ج) استنتج كل حلول المعادلة (E).

36

عند حقن مريض بكمية A من دواء ما فإن الكمية المتبقية في الدم عند اللحظة t بعد

عملية التخلص الطبيعى هي $Ae^{-\frac{t}{24}}$. علما أن وحدة الزمن هي الساعة (h) ، مبنا

الزمن هي لحظة الحقن، وحدة الحجم هي (cm^3)

(1) ما هي كمية الدواء المتبقية بعد 8 ساعات من الحقن ؟

(2) نحقن هذا المريض بجرعة A كل 8 ساعات، مثل بيانيا كمية الدواء الموجودة في

الدم خلال 72 ساعة التي تلي الحقن الأول.

(3) يكون الدواء فعالا إذا وفقط إذا كان الدم يحتوي على كمية على الأقل تساوي

$19A$. باستعمال البيان السابق عين اللحظة التي ابتداء منها يصبح هذا الدواء فعالا.

(1-4) بين أنه بعد الحقن رقم n تكون كمية الدواء الموجودة في الدم هي $A \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{3}}}{1 - e^{-\frac{1}{3}}} \right)$

(ب) أوجد بالحساب نتيجة السؤال (3).

(ج) عندما تصبح كمية الدواء في الدم أكبر من $46A$ ، فإن الدواء يصبح خطيرا.

هل الاستمرار في وقيرة العلاج المتبقية في (2) خطيرة أم لا ؟ إذا علمت أن مدة العلاج

المحددة من طرف الطبيب هي 4 أيام ؟

نريد مقارنة الطرق المختلفة للتوفير بفائدة مركبة لذلك نودع مبلغ 10.000 DA في بنك بنسبة سنوية 5% خلال 5 سنوات.

(1) كم يصبح رصيده خلال هذه المدة ؟
(2-1) إذا كان الرصيد يزيد كل ستة أشهر بنسبة سنوية x أحسب x ثم حدد رصيده خلال نفس الفترة.

(ب) احب عن السؤال (1) من أجل تدخير ثلاثي الأشهر، شهري، يومي.
مع العلم أنه إذا كانت x هي النسبة السنوية فإن النسبة الشهرية المكافئة لها هي x^n حيث $(1+x^n)^{12} = 1+x$

الدرس 5

الدالة اللوغاريتمية النبرية

الهدف

• رأينا في درس الدالة الأسية أن المعادلة $e^x = m$ مع $m > 0$ لها حل وحيد على \mathbb{R} ، هذا الحل رمزنا له بـ $\ln(m)$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m ، العدد $\ln(m)$ يمثل العدد الحقيقي الذي صورته m بالدالة \exp عندئذ نستطيع أن نعرف على المجال $]0, +\infty[$ الدالة $m \mapsto \ln(m)$ التي



نرمز لها بصيغة عامة $x \mapsto \ln(x)$.
و التي تسمى بالدالة اللوغاريتمية النبرية و نرمز لها بـ \ln .
الدالة اللوغاريتمية النبرية هي الدالة العكسية للدالة \exp والعكس صحيح.

1 - الدالة اللوغاريتمية النبرية

1-1 تعريف

• نسمي لوغاريتم نبري لعدد حقيقي موجب تماما m ، الحل الوحيد للمعادلة $e^a = m$ ذات المجهول a ونرمز لهذا الحل بالرمز $\ln(m)$ و يقرأ " اللوغاريتم النبري لـ m ".

الدالة اللوغاريتمية النبرية هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد الحقيقي $\ln(x)$ ونكتب $\ln(x) \rightarrow x$

نتيجة

(1) من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x و y لدينا ،

$$\ln(x) = y \text{ يكافئ } x = e^y$$

(2) $e^0 = 1$ يكافئ $\ln(1) = 0$ و $e^1 = e$ يكافئ $\ln(e) = 1$

(3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\ln(e^x) = x$

و من أجل كل $x > 0$ لدينا $\exp(\ln(x)) = x$

1-2 خواص

(1) الدالة \ln معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$

(2) الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $\ln(x) = \frac{1}{x}$ و $\ln(1+h) \approx h$

يكون h بجوار الصفر.

(3) الدالة \ln متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ ومنه نستنتج ما يلي

$$x > 1 \text{ يكافئ } \ln(x) > 0$$

$$x > 0 \text{ يكافئ } \ln(x) < 0$$

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b :

$$a = b \text{ يكافئ } \ln(a) = \ln(b)$$

$$a < b \text{ يكافئ } \ln(a) < \ln(b)$$

الإنبات

(1) تقبل أن الدالة \ln مستمرة على $]0, +\infty[$

(2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة \ln قابلة للاشتقاق عند العدد a إذا وفقط إذا كانت نهاية النسبة

$$\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$$

لا يؤول إلى a تساوي عدد حقيقي.

نضع $t(x) = \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$ مع $x \neq a$.

نضع $\ln(x) = X$ و $\ln(a) = A$ و عليه لا $x \rightarrow a$ فإن $X \rightarrow A$.

$$\lim_{x \rightarrow a} t(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{1}{e^X - e^A} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{a}$$

الدالة اللوغاريتمية النبرية

إذن الدالة \ln قابلة للاشتقاق عند a و عددتها المشتق هو $\frac{1}{a}$

و عليه من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$\ln(1+h) \approx \ln(1) + h \times \ln'(1) \approx h$$

لأن $\ln(1) = 0$ و $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

(3) بما أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $\frac{1}{x} > 0$

فإن الدالة \ln متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

بما أن $\ln(1) = 0$ فإن من أجل $x \in]0, 1[$ يكون $\ln(x) < 0$

و من أجل $x > 1$ يكون $\ln(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $\ln(x)$		+	+
تغيرات \ln			

تمرين تدريبي

عين في كل حالة من الحالات التالية المجموعة التي ينتمي إليها x بحيث العبارات المعطاة ذات معنى.

$$(أ) \ln(-x) \quad (ب) \ln(x^2) \quad (ج) \ln(x-2)$$

$$(د) \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad (هـ) \ln|x+1| \quad (و) \ln|x^2 - 3x + 2|$$

الحل

بما أن الدالة \ln معرفة على $]0, +\infty[$ فإن إلا الأعداد الموجبة تماما التي لها لوغاريتم.

(أ) العبارة $\ln(-x)$ لها معنى إذا وفقط إذا $-x > 0$ أي $x < 0$.

(ب) العبارة $\ln(x^2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x^2 > 0$ أي $x \neq 0$ و عليه $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(ج) العبارة $\ln(x-2)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $x-2 > 0$ أي $x > 2$ و عليه $x \in]2, +\infty[$.

(د) العبارة $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$ و $x+1 \neq 0$

أي $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

(هـ) العبارة $\ln|x+1|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x+1| > 0$

أي $x+1 \neq 0$

وهذا يعني أن $x \neq -1$ و منه $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(و) العبارة $\ln|x^2 - 3x + 2|$ لها معنى إذا وفقط إذا كان $|x^2 - 3x + 2| > 0$

أي $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

بما أن e و $e^{-\frac{1}{3}}$ ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول للمعادلة (*) هي $S = \left\{ e, e^{-\frac{1}{3}} \right\}$

(4) المجموعة المرجعية E للمعادلة $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ هي \mathbb{R} .

بوضع $X = e^x$ فإن للمعادلة (4) تصبح $3X^2 - 2X - 1 = 0$ وهذه الأخيرة لها حلان 1 و $-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$ مرفوض لأن $X > 0$ والحل 1 مقبول.

$e^x = 1$ يكفي $x = \ln(1) = 0$.

إذن مجموعة حلول للمعادلة (4) هي $S = \{0\}$.

2 - الخاصية الأساسية ونتائجها

2-1 الخاصية الأساسية

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b يكون $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

الإثبات

لدينا $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$ (1)

$e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$ (2)

من (1) و (2) نجد $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$ وبما أن الدالة \exp تقابل فإنه ينتج

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

2-2 نتائج

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا،

(1) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ ، (2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ ، (3) $\ln(a^n) = n \ln(a)$

(4) $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$ ، (5) $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$

الإثبات

(1) $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ (1)

(2) $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$ (2)

من (1) و (2) نجد $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

$x^2 - 3x + 2 \neq 0$ يكفي،

$(x \neq 1)$ و $(x \neq 2)$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي

$\mathbb{R} - \{1, 2\}$

تمرين تدريبي 2

حل في \mathbb{R} المعادلات والمترجمات التالية.

(1) $\ln(x^2 + 2) = \ln(3x)$ ، (2) $\ln(x^2 + 2) \geq \ln(3x)$

(3) $3(\ln(x))^2 - 2\ln(x) - 1 = 0$ ، (4) $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$

✓ الحل

- لحل المعادلة $\ln V(x) = \ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x) > 0$

و $V(x) > 0$ ثم نحل في \mathbb{R} المعادلة $V(x) = U(x)$ ولا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E .

- لحل المترجمة $\ln V(x) \leq \ln(U(x))$ نجد E مجموعة الأعداد x بحيث $U(x) > 0$

و $V(x) > 0$ ثم نحل المترجمة $V(x) \leq U(x)$ ولا نقبل إلا الحلول التي تنتمي إلى E .

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2 + 2 > 0$

$3x > 0$ يكفي $x > 0$ ومنه المجموعة E هي $]0, +\infty[$

نضع $U(x) = 3x$ و $V(x) = x^2 + 2$

$V(x) = U(x)$ يكفي $x^2 - 3x + 2 = 0$ يكفي $(x=1)$ أو $(x=2)$

بما أن 1 و 2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول للمعادلة (1) هي $S = \{1, 2\}$.

(2) المجموعة E هي $]0, +\infty[$.

$V(x) \geq U(x)$ يكفي $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

لكي يكون $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ يجب أن يكون $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ ومنه مجموعة

حلول المترجمة (2) هي:

$S = (]0, +\infty[) \cap (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) =]0, 1] \cup [2, +\infty[$

(3) $3(\ln x)^2 - 2\ln(x) - 1 = 0$ (*)

المجموعة المرجعية E هي $]0, +\infty[$.

بوضع $\ln(x) = X$ للمعادلة (*) تصبح $3X^2 - 2X - 1 = 0$ وهذه الأخيرة لها حلين هما 1 و $-\frac{1}{3}$

$\ln(x) = 1$ يكفي $x = e$

$\ln(x) = -\frac{1}{3}$ يكفي $x = e^{-\frac{1}{3}}$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

$$= \ln(a) - \ln(b)$$

(3) نبرهن على صحة المساواة بالتراجع على n :

نسمي الخاصية " $\ln(a^n) = n \ln(a)$ "

P_n صحيحة لأن $\ln(a^1) = \ln(a)$

نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $\ln(a^n) = n \ln(a)$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln(a)$

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a^1) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a)$$

منه P_{n+1} صحيحة وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

$$\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) \quad (4)$$

$$= -\ln(a^n) = -n \ln(a)$$

(5) لدينا $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ومنه ينتج $\ln((\sqrt[n]{a})^n) = \ln(a)$ وبتطبيق نتيجة (3) نجد

$$n \ln(\sqrt[n]{a}) = \ln(a) \quad \text{بقسمة طرفي هذه المساواة على } n \text{ نجد } \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

ملاحظة

إذا كان a و b عددين حقيقيين سالبين تماما فإن $ab > 0$ وبالتالي نكتب

$$\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|) \quad \text{و} \quad ab = |ab| = |a||b|$$

مبرهنة

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وبحيث $f(ab) = f(a) + f(b)$ فإن

الدالة f هي من الشكل $k \cdot \ln$.

وإذا اضيف الشرط $f(e) = 1$ فإن f هي الدالة \ln .

الإنشآت

- لدينا $f(a \times 1) = f(a) + f(1)$ منه نجد $f(1) = 0$

- لنعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = f(ax) - f(x)$ مع $a > 0$

من أجل كل $x > 0$ لدينا $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$.

إذن الدالة g ثابتة.

وبما أن g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $g'(x) = a f'(ax) - f'(x)$ و $g'(x) = 0$

ينتج $a f'(ax) = f'(x)$.

من أجل $x=1$ نجد $a f'(a) = f'(1)$

وإذا وضعنا $f'(1) = k$ فإن $f'(a) = \frac{k}{a}$

إذن من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $f'(x) = \frac{k}{x}$.

نعتبر الدالة h المعرفة بـ $h(x) = f(x) - k \ln(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $h(x) = f(x) - \frac{k}{x} = \frac{k}{x} - \frac{k}{x} = 0$

إذن الدالة h ثابتة على المجال $]0, +\infty[$

ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $h(x) = h(1) = f(1) = 0$ إذن $f(x) = k \ln(x)$.

بما أن $f(e) = k \ln(e) = k$ و $f(e) = 1$ فإن $k=1$ وبالتالي $f(x) = \ln(x)$.

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية $A = \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)$

$$C = \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \quad , \quad B = \ln(\sqrt{2}+1)^3 + \ln(\sqrt{2}-1)^3$$

✓ الحل

$$A = \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \ln((\sqrt{2})^2 - 1^2) = \ln(1) = 0$$

$$B = 3 \ln(\sqrt{2}+1) + 3 \ln(\sqrt{2}-1) = 3(\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1)) = 3A = 0$$

$$C = \ln\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{1}\right) = 2 \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والتراجعات التالية في \mathbb{R} .

$$\ln(x+4) + \ln(x+2) = \ln(8) \quad (2) \quad \ln(x+4)(x+2) = \ln(8) \quad (1)$$

$$\ln(x+4)(x+2) \leq \ln(8) \quad (4) \quad \ln(x+4) + \ln(x+2) \leq \ln(8) \quad (3)$$

✓ الحل

لحل معادلات (متراجعات) يظهر فيها اللوغاريتم نبحث أولا عن المجموعة E مجموعة تعريف

العادلة (التراجعات) ثم نكتب المعادلة المعطاة على الشكل $\ln(V(x)) = \ln(U(x))$

(التراجعات المعطاة على الشكل $\ln(V(x)) \leq \ln(U(x))$)

الطريقة الثانية

لإثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ يجب أن نبين من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد على الأقل عدد حقيقي β بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $\ln(x) > A$.
بما أن الدالة \exp متزايدة تماما على \mathbb{R} فإن $\ln(x) > A$ يكافئ $x > e^A$
لأن من أجل كل عدد حقيقي تماما A يوجد عدد حقيقي $\beta = e^A$

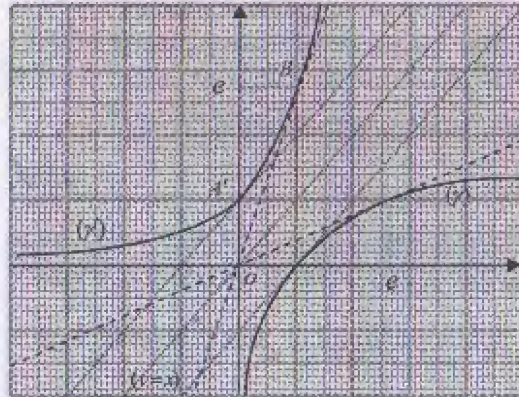
x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$ إشارة		+	
تغيرات \ln			$+\infty$

بحيث إذا كان $x > \beta$ يكون $\ln(x) > A$.
(2) من أجل كل $x > 0$ نضع $X = \frac{1}{x}$
ومن هنا نجد $\ln x = -\ln X$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\infty$

2-3 التمثيل البياني للدالة \ln

مبرهنة

للتحنيان المثلان للدالتين \exp و \ln متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس.
- (γ) له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$ إذن (γ) له مستقيم مقارب معادلته $x=0$ بجوار 0
- المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A'(0,1)$ وبالتالي فالمستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,0)$



تمرين تدريبي

حل المعادلة و التراجحة التاليتين

(1) $(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 2 = 0$ (2) $(\ln x - 2)(\ln x - 4) \leq 0$

الحل

(1) المجموعة المرجعية للمعادلة (1) هي $E =]0, +\infty[$
بوضع $X = \ln x$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2 - 3X + 2 = 0$ و حلول هذه الأخيرة هي 1 و 2

(1) x لا يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$

أي $E =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$ ومنه $x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$

$\ln(x+4)(x+2) = \ln(8)$ يكافئ $(x+4)(x+2) = 8$

و حلا للمعادلة $x^2 + 6x = 0$ هما $x=0$ و $x=-6$

بما أن 0 و -6 ينتميان إلى E فإن مجموعة الحلول للمعادلة المقترحة هي $S = \{0, -6\}$

(2) x لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة المقترحة إلا إذا كان $x+4 > 0$ و $x+2 > 0$ أي $x > -4$ و $x > -2$

$x > -2$ ومنه $E =]-2, +\infty[$ و نكتب في E على الشكل $\ln(x+4)(x+2) = \ln(8)$

حل المعادلة (*) يؤول إلى حل المعادلة $(x+4)(x+2) = 8$

$(x+4)(x+2) = 8$ يكافئ $x=0$ أو $x=-6$ و -6 لا ينتمي إلى E

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي $S = \{0\}$

(3) المجموعة المرجعية E هي $E =]-2, +\infty[$

التراجحة المقترحة نكتب في E على الشكل $\ln(x+4)(x+2) \leq \ln(8)$

حل التراجحة (*) يؤول إلى حل التراجحة $(x+4)(x+2) \leq 8$

$(x+4)(x+2) \leq 8$ يكافئ $x \in]-6, 0[$

ومن هنا مجموعة حلول التراجحة المقترحة هي $S = E \cap]-6, 0[=]-2, 0[$

(4) x لا يكون حلا للتراجحة المقترحة إلا إذا كان $(x+4)(x+2) > 0$

أي $E =]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$ ومنه $x \in]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[$

التراجحة المقترحة نكتب في E على شكل $(x+4)(x+2) \leq 8$ أي $x^2 + 6x \leq 0$

$x^2 + 6x \leq 0$ يكافئ $x \in]-6, 0[$

ومن هنا مجموعة حلول التراجحة المقترحة هي $S = E \cap]-6, 0[=]-6, -4[\cup]-2, 0[$

3 دراسة الدالة \ln

1-3 حساب النهايات عند $(+\infty)$ و 0

مبرهنة

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

الإنبيات

الطريقة الأولى

بوضع $\ln x = y$ نجد $x = e^y$

بما أن x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن e^y يؤول إلى $(+\infty)$ و لكي يؤول e^y إلى $(+\infty)$ يجب أن يؤول y إلى $(+\infty)$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\ln x = 1 \text{ يكافئ } x = e^1 = e$$

$$\ln x = 2 \text{ يكافئ } x = e^2$$

وبما أن e و e^2 ينتميان إلى E فإن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{e, e^2\}$.

(2) المجموعة المرجعية للمترابحة (2) هي $E =]0, +\infty[$.

بوضع $X = \ln x$ المترابحة (2) نكتب على الشكل $(X-2)(X-4) \leq 0$

و مجموعة حلول هذه الأخيرة هي $[2, 4]$ أي $2 \leq X \leq 4$ لكن $\ln e^2 = 2$ و $\ln e^4 = 4$

$$\ln e^2 = 2 \text{ و } \ln e^4 = 4 \text{ بالتالي } \ln e^2 \geq \ln x \geq \ln e^4$$

ومنه ينتج $e^2 \geq x \geq e^4$ (لأن الدالة \ln متزايدة تماما)

إذن مجموعة حلول المترابحة (2) هي $S = [e^2, e^4]$.

تمرين تدريبي 2

(γ) المنحني البياني للدالة \ln في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

C نقطة منه فاصلتها a مع $a > 0$.

(1) اكتب بدلالة a معادلة المماس (T_a) للمنحني (γ) عند النقطة C .

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ أن المماس (T_a) يقع فوق (γ).

(3) استنتج أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $\ln x \leq x-1$.

الحل

$$(1) \text{ حيث } f'(x) = \ln x \text{ ، } y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ ، } (T_a)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\text{إذن } f'(a) = \frac{1}{a} \text{ و بالتالي } (T_a) : y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln a$$

(2) دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T_a).

لدراسة الوضع النسبي للمنحني (γ) بالنسبة إلى المماس (T_a) ندرس إشارة المقدار

$$d(x) = \ln x - \left(\frac{x}{a} - 1 + \ln a \right)$$

الدالة d قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و من أجل كل $x > 0$

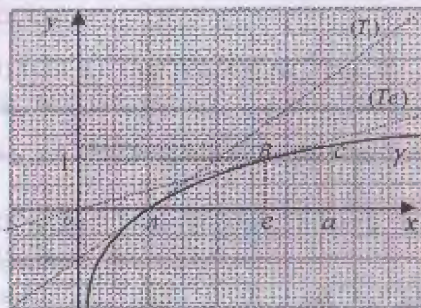
$$\text{لدينا } d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$$

نلاحظ من الجدول أن من أجل كل

$$x \neq a \text{ لدينا } d'(x) < 0$$

إذن المنحني (γ) يقع تحت المماس (T_a)

x	0	a	$+\infty$
$d'(x)$ إشارة		+	-
تغيرات d		↗ 0 ↘	



و عليه من أجل كل $x > 0$ يكون

$$\ln x \leq \ln a + \frac{x-a}{a}$$

المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مماس

لـ (γ) عند النقطة $A(1, 0)$ و بالتالي

المنحني (γ) يقع تحت المستقيم (Δ)

أي من أجل كل x من $]0, +\infty[$

$$\ln x \leq x-1 \text{ يكون}$$

تمرين تدريبي 3

بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln x < \sqrt{x}$

الحل

الطريقة المناسبة للبرهان على أن $\ln x < \sqrt{x}$ من أجل كل $x > 0$ هي دراسة تغيرات الدالة

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x} \text{ المعرفة على } I =]0, +\infty[\text{ بالعبارة}$$

$$\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } I \text{ ولدينا } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 4$$

$$2 - \sqrt{x} \geq 0 \text{ يكافئ } x \leq 4$$

$$2 - \sqrt{x} \leq 0 \text{ يكافئ } x \geq 4$$

وبما أن $2.718 < e < 2.719$ فإن

$$e^2 < 4 \text{ و بالتالي } \ln e^2 > \ln 4$$

$$\text{أي } \ln(4) - 2 < 0$$

لأن من أجل كل x من $]0, +\infty[$

$$\text{يكون } f(x) < 0 \text{ و بالتالي } \ln x - \sqrt{x} < 0 \text{ أي } \ln x < \sqrt{x}$$

4 نهايات شهيرة

مرهنة

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

(1) الدالة \ln قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

فهي قابلة للاشتقاق عند 1 و عددتها المشتق هو $\ln'(1) = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1 \quad \text{أي} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

(2) بوضع $X = \ln(x)$ يكون $x = e^X$ و لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0^+$$

(3) بوضع $X = \frac{1}{x}$ يكون $x \ln x = -\frac{\ln X}{X}$

و لما x يؤول إلى الصفر بقيم أكبر فإن X يؤول إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0^-$$

ملاحظة

$$\text{بوضع } x = X-1 \text{ العبارة } \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ تكتب } \frac{\ln X}{X-1}$$

$$\text{وعليه } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$$

التفسير الهندسي والتحليلي للنهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

- إذا كانت M نقطة كيفية من التمثيل البياني للدالة \ln فإن إحداثياتها $(x, \ln x)$

الستقيم (OM) معامل توجيهه $\frac{\ln x}{x}$ و عليه لما x يأخذ قيما كبيرة جدا، فإن المستقيم

(OM) يقترب أكثر فأكثر من محور الفواصل، حينئذ نستطيع القول أن المنحني البياني (γ)

للدالة \ln لا يقبل مستقيما مقاريا مائلا.

- المسافة العمودية بين (γ) و محور الفواصل تتزايد ببطء شديد كلما أخذ x قيما كبيرة

جدا و هنا يجعلنا نرى أن المنحني (γ) على شكل قطع مستقيمة موازية لـ (x, x') على مجال

من الشكل $[a, b]$ حيث a و b كبيرتان جدا.

- النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ تسمح لنا بمقارنة x و $\ln x$ من أجل قيم كبرى لـ x .

نقول أن x تتفوق على $\ln x$ بجوار $(+\infty)$.

تمرين تدريبي

احسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+1) - \ln(x-1) \quad (4)$$

الحل

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فإنه حسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{وعليه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty - \infty$$

من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty$$

و منه نحصل على حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$

لبحث عن كتابة أخرى لـ $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-1)$ بحيث تظهر النهايات الشهيرة.

ومن أجل كل $x > 1$ يكون $f(x) = \ln \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)$

$$\text{لكن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

و منه نحصل على عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$ بوضع $-\frac{1}{x} = X$ فإن العبارة

$$x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \text{ تصبح } -\frac{\ln(1+X)}{X}$$

$$\text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$$

تمارين تدريبي - 2

- باعتباره من أجل كل $x > 0$ و $a > 0$ لدينا $Ln x \leq Ln a + \frac{x-a}{a}$ *
- (1) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ يكون $Ln(a+1) - Ln(a) \leq \frac{1}{a}$.
- (2) ما هو شكل المنحنى (γ) في المجال $[100, 101]$ ؟

✓ الحل

- (1) بوضع $x = a+1$ في المتباينة (*) نجد $Ln(a+1) \leq Ln a + \frac{a+1-a}{a}$ أي $Ln(a+1) - Ln a \leq \frac{1}{a}$ (**)
- (2) بوضع $a = 100$ في العلاقة (**) نجد $Ln 101 - Ln 100 \leq \frac{1}{100}$ ومنه نستنتج أن النقطتين $A(100, Ln 100)$ و $B(101, Ln 101)$ لهما نفس الترتيب تقريبا وهذا مما يفسران (γ) في المجال $[100, 101]$ على شكل قطعة مستقيمة موازية لـ (x, x') .

5. اللوغاريتم العشري

1-5 تعريف

نسمي الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز لها بـ Log المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $Log x = \frac{Ln x}{Ln 10}$ مع $Log 10 = 1$ و $Log 1 = 0$.

2-5 خواص

- (1) الدالة Log معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.
- (2) الدالة Log متزايدة تماما على $]0, +\infty[$ لأن $Ln 10 > 0$.
- (3) الدالة Log لها نفس الخواص الجبرية للدالة Ln .
- وبصفة خاصة أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b و من أجل كل عدد طبيعي p ،
- $Log a^p = p Log a$ و $Log ab = Log a + Log b$ و $Log 10^p = p$.
- (4) من أجل كل عدد حقيقي A موجب تماما لدينا $A \geq 10^n > 10^{n+1} Log A \geq n$ يكافئ $x = 0$ مستقيم مقارب لـ (γ) .

تمارين تدريبي

- باعتبار أن عددا A يحقق $10^{n+1} > A \geq 10^n$ حيث n عدد طبيعي.
- (1) ما هو عدد أرقام جزئه الصحيح ؟
- ثم استنتج حصرا للعدد $Log A$ معنا الجزء الصحيح لـ $Log A$.
- (2) إذا علمت أن $Log A = 5,52$ ما هو عدد أرقام جزئه الصحيح لـ A و \sqrt{A} و A^{100} ؟

✓ الحل

- (1) عدد يتألف من رقمين يكون محصورا بين 10 و 100، وآخر يتألف من ثلاثة أرقام يكون محصورا بين 100 و 1000 وبشكل عام فإن العدد المحصور بين 10^n و 10^{n+1} عدد أرقامه $(n+1)$.
- $A \geq 10^n$ يكافئ $Log A \geq n$ وبالتالي الجزء الصحيح لـ $Log A$ هو n .
- (2) - نعلم أن $Log A \geq 5$ و $Log A < 6$ ومنه ينتج $10^5 < A \leq 10^6$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح للعدد A هو 6.
- لدينا $Log \sqrt{A} = \frac{1}{2} Log A = 2,760$ ومنه ينتج $10^2 < \sqrt{A} \leq 10^3$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح لـ \sqrt{A} هو 3.
- لدينا $Log A^{100} = 100 Log A = 552$ و عليه يكون $10^{552} < A^{100} \leq 10^{553}$ ومنه ينتج $10^{552} < A^{100} \leq 10^{553}$ وبالتالي عدد أرقام الجزء الصحيح لـ A^{100} هو 553.

6. الدالة المركبة مع الدالة Ln

لتكن U دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على مجال I ولنعتبر الدالة $g = Ln \circ U$ المعرفة بـ

مرهنة

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على I و من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$ وإشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $U'(x)$.

الاحصيات

من أجل كل x من I لدينا $g'(x) = (Ln u(x))' = U'(x) \times L'n(U(x))$

وبما أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $L'n(x) = \frac{1}{x}$ فإن $L'n(U(x)) = \frac{1}{U(x)}$

لأن $g'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

بما أن $U(x) > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $U'(x)$.

نتيجة

الدالة المشتقة للدالة $U(x)$ هي الدالة $x \rightarrow \ln |U(x)|$ هي الدالة $x \rightarrow \frac{U'(x)}{U(x)}$

خواص

(1) الدالتان U و $\ln \circ U$ لهما نفس اتجاه التغير على I .

(2) في كل ما يلي نعتبر (*) إما عدد a أو $+\infty$ أو $-\infty$.

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = +\infty$.

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = -\infty$.

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = b$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \ln(U(x)) = \ln(b)$ بحيث $b > 0$.

تمرين تدريبي 1

درس تغيرات الدالة g المعرفة بالعبارة $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

✓ الحل

- الدالة g معرفة إذا وفقط إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$

أي $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ ومنه $D_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على D_g لأنها مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على D_g هما:

$$x \mapsto \ln(x) \text{ و } x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

ومن أجل كل x من D_g لدينا $g'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

ومن أجل كل x من D_g يكون $g'(x) > 0$.

ومنه g متزايدة تماماً على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+			+
تغيرات g		↗	↘	

- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \ln(1) = 0$.

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(1) = 0$.

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0^+$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.

بما أن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$.
 $x=0$ و $x=-1$ و $y=0$ مستقيمات مقاربة لـ (C_g) .

تمرين تدريبي 2

(1) بدراسة تغيرات الدالة $x \mapsto \ln(x+1) - x$ على المجال $]0, +\infty[$ بين أنه

من أجل كل $x > 0$ يكون $\ln(x) \leq x - 1$... (i)

(2) باستعمال للتباينة (1)

(a) بين أنه من أجل كل $t > -1$ يكون $\ln(1+t) \leq t$.

(ب) بوضع $x = \frac{1}{1+t}$ بين أنه من أجل كل $t > -1$ يكون $\ln(1+t) \leq \frac{t}{1+t}$.

ثم استنتج حصراً للعدد $\ln(1+x)$ من أجل كل $x > -1$.

(3) بوضع $x = \frac{1}{p}$ مع p عدد طبيعي غير معدوم.

(a) بين أن $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.

(ب) (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.

- بين أن $U_n \leq \ln(2) \leq U_n + \frac{1}{2n}$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة نحو $\ln(2)$.

- اعط حصراً $\ln(2)$ من أجل $n=5$.

✓ الحل

(1) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x=1$.

- إذا كان $x > 1$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماماً على $]1, +\infty[$.

- إذا كان $x < 1$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $]0, 1[$.

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات f	↗	↘	

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1-x}{x} \right) = -\infty$$

نلاحظ من جدول تغيرات f أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً. لدينا

$$f(x) \leq 0 \text{ أي } \ln(x) \leq x - 1$$

$$(2) \text{ (i) لدينا } \ln(x) \leq -1 + x \text{ ...}$$

بوضع $x = 1+t$ في العبارة (1) نجد $\ln(1+t) \leq -1 + (1+t)$ أي $\ln(1+t) \leq t$... (*)

$$(ب) \text{ بوضع } x = \frac{1}{1+t} \text{ في العبارة (1) نجد } \ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq -1 + \frac{1}{1+t}$$

$$\text{بالتبسيط } \ln(1+t) \geq \frac{-t}{1+t} \text{ ... (**)}$$

$$\text{من (*) و (**) نجد } t \leq \ln(1+t) \leq \frac{t}{1+t} \text{ ... (1)}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$ لدينا $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

$$(3) \text{ (i) بوضع } x = \frac{1}{p} \text{ في العبارة (1) نجد } \frac{1}{1+\frac{1}{p}} \leq \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{بالتبسيط نجد } \frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

$$(ب) \text{ من أجل } p = n \text{ لدينا } \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{من أجل } p = n+1 \text{ لدينا } \frac{1}{n+2} \leq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{من أجل } p = n+2 \text{ لدينا } \frac{1}{n+3} \leq \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\vdots$$

$$\text{من أجل } p = 2n-1 \text{ لدينا } \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{2n-1}$$

يجمع أطراف المتباينات طرفاً إلى طرف وحسب خواص الدالة \ln نجد :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \dots \times \frac{2n}{2n-1}\right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{بالتبسيط نجد } U_n \leq \ln(2) \leq U_n + \frac{1}{2n} \text{ أي } U_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n}\right) \leq U_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

ومن نستنتج أن (U_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N}

بما أن $U_n \leq \ln(2)$ فإنه (U_n) محدودة من الأعلى وعليه فالمتتالية متقاربة نحو ℓ

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln(2)$$

- من أجل $n=5$ لدينا $U_5 \leq \ln(2) \leq U_5 + \frac{1}{10}$

$$U_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 0,643 \text{ ومنه } 0,643 \leq \ln(2) \leq 0,743 \text{ وبالتالي}$$

7. دراسة الدالة $x \mapsto a^x$ مع $a > 0$ و $a \neq 1$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $a^x = e^{x \ln a}$

إذن $f_a(x) = e^{x \ln a}$ وتكتب أيضاً $f_a(x) = e^{u(x)}$ حيث $u(x) = x \ln a$

الآن f_a هي الدالة للركبة $\exp \circ U$ التي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها بـ \exp_a

7-1 اتجاه تغير f_a

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و $a \neq 1$ الدالة f_a المعرفة على \mathbb{R} بـ $f_a(x) = a^x$ قابلة

للاشتقاق على \mathbb{R} و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'_a(x) = (\ln a) a^x$

النتائج

بما أن الدالة $x \mapsto x \ln a$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} فإن الدالة $f_a = \exp \circ U$

معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا

$$f'_a(x) = (\exp \circ U)'(x) = u'(x) \exp(u(x)) = \ln(a) \times e^{u(x)} = \ln(a) \times a^x$$

نتيجة

إشارة $f'_a(x)$ من إشارة $\ln(a)$ لأن $a^x > 0$

- إذا كان $a > 1$ فإن $f'_a(x) > 0$ ومنه f_a متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $f'_a(x) < 0$ ومنه f_a متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

مثال -

$$\left((\sqrt{2})^x \right)' = \ln(\sqrt{2}) \times (\sqrt{2})^x, \quad (2^x)' = \ln(2) \times 2^x$$

2- نهاية f_a عند $(+\infty)$ وعند $(-\infty)$

بما أن $a^x = e^{x \ln(a)}$ و بما أن $\ln(a)$ يغير إشارته في حوارا فإننا نميز حالتين بالنسبة إلى a ، الحالة الأولى $a > 1$

بما أن $a > 1$ فإن $\ln(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

الحالة الثانية $a < 1$

بما أن $a < 1$ فإن $\ln(a) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

اليك جدول تغيرات f_a

الحالة	x	$-\infty$	$+\infty$
$a > 1$	إشارة	-	+
	$f'_a(x)$	-	+
	تغيرات f_a	$+\infty$	0

ملاحظة

(1) الدالة f_a هي الدالة العكسية للدالة \log_a حيث $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} = x \quad \text{حيث} \quad y = a^x$$

$$f_{\frac{1}{a}}(x) = e^{x \ln(\frac{1}{a})} = e^{-x \ln(a)} = f_a(-x)$$

(2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_a(-x) = f_{\frac{1}{a}}(x)$ متناظران بالنسبة إلى محور التناظر.

تمرين تدريبي

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحنائها (f) حيث $f(x) = (2-x) \times 3^x$

(2) ادرس تغيرات g ثم ارسم منحنائها (g) حيث $g(x) = x - 2^x \times \frac{1}{\ln(2)}$

الحل

(1) الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} هما:

$$x \mapsto 2-x \quad \text{و} \quad x \mapsto 3^x$$

$$\text{ولدينا } f'(x) = 3^x(-x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1)$$

$$x = \frac{2 \ln(3) - 1}{\ln(3)} = \alpha \quad \text{تكافئ } f'(x) = 0$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(-x \ln(3) + 2 \ln(3) - 1)$ و عليه

- إذا كان $x < \alpha$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty, \alpha[$

- إذا كان $x > \alpha$ فإن $f'(x) < 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]\alpha, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{عدم التحين.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) e^{x \ln(3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 e^{x \ln(3)} - x e^{x \ln(3)}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 e^{x \ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)} x \ln(3) \times e^{x \ln(3)} \right] = 0$$

$$\text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(3) e^{x \ln(3)} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 e^{x \ln(3)} = 0$$

$$f(\alpha) = 3,0135 \quad , \quad \alpha \approx 1,1$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-
تغيرات f	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(2) الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 1 - 2^x = 1 - e^{x \ln(2)}$

$$g'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 2^x = 1 \quad \text{يكافئ} \quad x = 0$$

إذا كان $x < 0$ فإن $1 - 2^x > 0$ أي

$g'(x) > 0$ ومنه g متناقصة تماما

على $]-\infty, 0[$.

إذا كان $x > 0$ فإن $1 - 2^x < 0$ أي

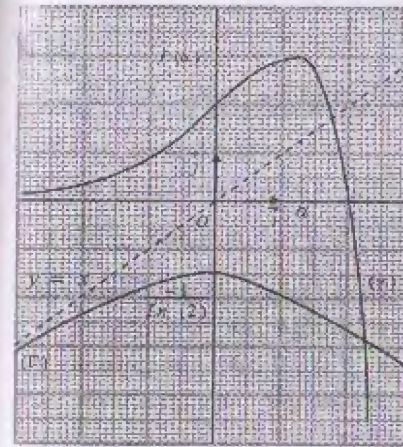
$g'(x) < 0$ ومنه g متزايدة تماما

على $]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{حالة عدم التحين.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	0	-
تغيرات g	$-\infty$	$\frac{-1}{\ln(2)}$	$-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{1}{\text{Ln}(2)} e^{x \text{Ln}(2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \frac{e^{x \text{Ln}(2)}}{x \text{Ln}(2)} \right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \text{Ln}(2)}}{x \text{Ln}(2)} = +\infty$

- للنحني (γ) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ في حوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2^x \times \frac{1}{\text{Ln}(2)} = 0$$

ومنه (Γ) يقبل مستقيم مقارب مانل معادلته $y = x$ في حوار $(-\infty)$

8. الأسس الحقيقية

من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و من أجل كل عدد حقيقي b نرمز إلى a^b بالرمز $e^{b \text{Ln}(a)}$ و نكتب عندئذ $a^b = e^{b \text{Ln}(a)}$.

نتيجة

من أجل كل عدد حقيقي b و من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ لدينا

$$\text{Ln}(a^b) = b \text{Ln}(a)$$

ملاحظة

- إذا كان b عدد صحيح فإن الكتابة a^b لها معنى من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم.
- إذا كانت b عدد حقيقي غير صحيح فإن a^b لا يكون معرفا إلا من أجل $a > 0$.

مثال

$$2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(2)} \quad (2) \quad 3 - \sqrt{2} = e^{-\sqrt{2} \text{Ln}(3)} \quad (1)$$

$$(-2)^{\frac{1}{2}} \neq e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(-2)} \quad (3) \quad \text{لأن } \text{Ln}(-2) \text{ غير موجود}$$

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين $a > 0$ و $a' > 0$ و من أجل كل عددين حقيقيين b و b' لدينا:

$$(a a')^b = a^b \times a'^b \quad (2) \quad a^b \times a^{b'} = a^{b+b'} \quad (1) \quad 1^b = 1$$

$$\frac{a^b}{a^{b'}} = \left(\frac{a}{a'} \right)^b \quad \text{و} \quad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'} \quad \text{و} \quad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad (1)$$

الإثبات

(1) $\text{Ln}(1^b) = b \text{Ln}(1) = 0$ ومنه $1^b = 1$ لأن الدالة Ln متزايدة تماما.

$$(a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad \text{و} \quad \text{Ln}(a^b)^{b'} = b' \text{Ln}(a^b) = b' b \text{Ln}(a) = \text{Ln}(a^{bb'}) \quad (2)$$

$$\text{Ln}\left(\frac{a^b}{a^{b'}}\right) = \text{Ln}(a^b) - \text{Ln}(a^{b'}) = b \text{Ln}(a) - b' \text{Ln}(a) = (b - b') \text{Ln}(a) = \text{Ln}(a^{b-b'})$$

ومنه $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$ بنفس الكيفية نبين النتائج الأخرى.

ملاحظة

- المساواة $(e^a)^b = e^{ab}$ محققة من أجل كل a عدد حقيقي و b عدد صحيح و تبقى صحيحة من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b .
- المساواة $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$ غير محققة من أجل أعداد حقيقية $a < 0$ و هذا عندما يكون b و b' عدنان حقيقيان غير صحيحين.

9. الدوال: $x \mapsto x^n$ مع n عدد صحيح غير معدوم

من أجل كل عدد صحيح n غير معدوم، هي الدالة $f_n: x \mapsto x^n$ و (f_n) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

لا يكون n عددا صحيحا سالبا غير معدوم و x عددا حقيقيا غير معدوم $f_n(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$

إذن ندرس الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

(أ) دراسة الدالة $x \mapsto x^n$ و $n \geq 1$
 f_n معرفة على \mathbb{R} .

إذا كان n زوجيا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = f_n(x)$ أي f_n زوجية.
إذا كان n فرديا فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f_n(-x) = -f_n(x)$ أي f_n فردية.
دراسة تغيرات f_n

بما أن f_n زوجية أو فردية (حسب n) فإننا نقتصر دراستها على $[0, +\infty[$.

- إذا كان $n = 1$ فإن $f_n(x) = x$

و هي دالة تألفيه بيانها مستقيم معادلته $y = x$.

- إذا كان $n \geq 2$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ $f_n(x) = n x^{n-1}$.

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $x^n = e^{n \ln x}$ ودراسة الدالة $x \mapsto x^n$ على $[0, +\infty[$ يؤول إلى دراسة $x \mapsto e^{n \ln x}$ وتسمى الدالة $x \mapsto x^n$ دالة الأس.

تمرين تدريبي

x عدد حقيقي يختلف عن 1. احسب المجموع التالي $S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

الحل

الأعداد $1, x, x^2, \dots, x^n$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها x وحدها الأول 1 وعدد حدود S هي $n+1$ لأن $S = 1 \times \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

10. دالة الجذر النوني

في هذه الفقرة n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

لكن f_n الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $f_n(x) = x^n$

f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$ إذن من أجل كل $y \in [0, +\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد x بحيث $x^n = y$.

إذا كان $y > 0$ فإن $\left(\frac{1}{y}\right)^n = y$ وبالتالي $x = \frac{1}{y^n}$

وإذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$.

نسمي العدد الحقيقي الموجب x بالجذر النوني لـ y

و نرمز له بـ $\sqrt[n]{y}$ و نكتب $\sqrt[n]{y} = x$

إذن من أجل كل $x \geq 0$ و $y \geq 0$ لدينا

$y = x^n$ يكافئ $x = \sqrt[n]{y}$

الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب y العدد الحقيقي الموجب x هي الدالة

العكسية للدالة f_n .

الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ تسمى دالة الجذر النوني.

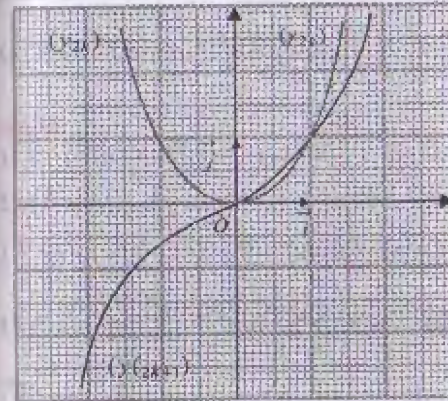


من أجل كل $x > 0$ لدينا $f'_n(x) > 0$ بالتالي f_n متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$	0	+
تغيرات f_n		$+\infty$

صورة $[0, +\infty[$ بالدالة f_n هي $[0, +\infty[$ وبالتالي f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$.

و التمثيل البياني للدالة f_n هو المنحني (γ_n) يقبل مماساً أفقياً في النقطة $(0, 0)$.



(ب) دراسة الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^n}$: f_n و $n \geq 1$

f_n معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$.

- إذا كان n زوجياً فإن f_n زوجية وإذا كان n فردياً فإن f_n فردية.

- دراسة تغيرات f_n

تقتصر الدراسة على $[0, +\infty[$ (لأن f_n زوجية أو فردية حسب n).

من أجل $x > 0$ يكون $f'_n(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

من أجل كل $x > 0$ يكون $f'_n(x) < 0$

ومن هنا f_n متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

وإليك جدول تغيرات الدالة f_n

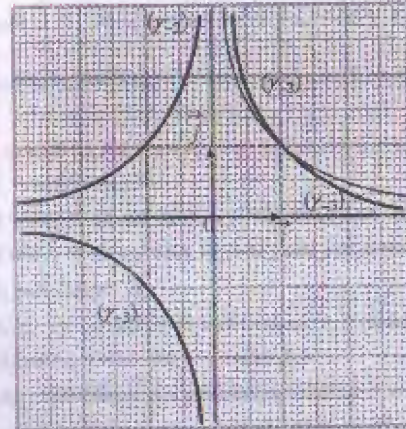
x	0	$+\infty$
إشارة $f'_n(x)$		
تغيرات f_n	$+\infty$	0

بما أن صورة $[0, +\infty[$ بالدالة f_n هي $[0, +\infty[$ فإن الدالة f_n تقابل من $[0, +\infty[$ في $[0, +\infty[$.

المنحني (γ_n) يقبل المستقيم $y = 0$

مماساً أفقياً و يقبل للمستقيم

المعادلة $x = 0$ مماساً عمودياً.



1-10 تعريف

دالة الجذر النوني هي الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ والمعروفة على المجال $[0, +\infty[$

ملاحظة

بما أن $(\sqrt[n]{x})^n = x$ و $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ فإن $x > 0$ و $\sqrt[n]{0} = 0$ و $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ كما يلي $x > 0$ يكون $\sqrt[n]{x} = 0$ و $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

2-10 خواص الدالة $\sqrt[n]{x}$

مبرهنة

دالة الجذر النوني قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ و دالتها للاشتقاق هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

الإثبات :

من أجل كل $x > 0$ لدينا $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(x)}$
 $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{n} \ln(x)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$

ملاحظة

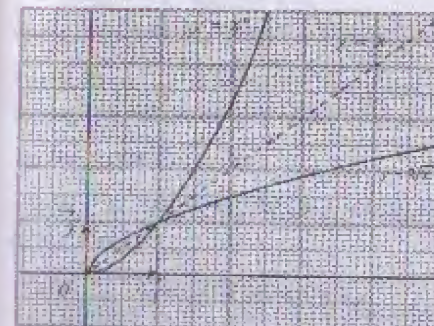
الدالة $\sqrt[n]{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر و منحناها البياني له مماس عمودي عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

نتيجة

دالة الجذر النوني مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$

3-10 التمثيل البياني للدالة $\sqrt[n]{x}$

دالة الجذر النوني هي الدالة
 العكسية للدالة $x \mapsto x^n$
 المعروفة على المجال $[0, +\infty[$
 و منحناها البيانيان متناظران
 بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة :
 $y = x$



تمرين تدريبي 1

(1) a عدد حقيقي موجب يختلف عن 1. برهن أن $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}}$ حيث n, p عدنان طبيعيان غير معدومين.
 (2) بسط العدد B حيث $B = \sqrt[3]{54} \times \sqrt[5]{64} \times \sqrt{6}$

الحل

$$(a^p)^{\frac{1}{n}} = (e^{p \ln(a)})^{\frac{1}{n}} = (e^{\ln(a^p)})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{p}{n}} \quad (1)$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(e^{\frac{1}{n} \ln(a)}\right)^p = (e^{\ln(a^{\frac{1}{n}})})^p = a^{\frac{p}{n}}$$

$$B = 54^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{2}} = (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}} \times (2^6)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \\ = (3^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{61}{30}}$$

تمرين تدريبي 2

(1) حل المعادلة $x^{\frac{4}{3}} = 2$. (ب) حل التراجحة $(x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2$

الحل

$$(1) \quad x^{\frac{4}{3}} = 2 \quad \text{برفع الطرفين إلى القوة } \frac{3}{4} \quad \text{نجد} \quad \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \quad \text{أي} \quad x = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \quad (x-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 2 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \geq 2 \quad \text{بالقلب نجد} \quad (x-1)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{وبما أن دالة الأس}$$

متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ فإنه نستنتج $\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{منه} \quad x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1$$

حتى تكون التراجحة لها معنى يجب أن يكون $x-1 > 0$ أي $x > 1$

$$\text{إذن مجموعة الحلول هي} \quad S = \left] 1, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right[$$

11. مقارنة بعض الدوال بجوار (+∞)

الدوال $x \rightarrow x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$) ، $x \rightarrow \ln x$ و $x \rightarrow e^x$ متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ ونهاية كل منها هي $(+\infty)$ و عليه من أجل قيم كبرى لـ x الأعداد e^x ، $\ln(x)$ ، x^n تكرر أكثر فأكثر و الهدف هو مقارنة ترتيب القادير e^x ، x^n ، $\ln(x)$ من أجل قيم كبرى لـ x .

من أجل ذلك ندرس النهايات عند $(+\infty)$ للدوال $x \rightarrow \frac{e^x}{x^n}$ ، $x \rightarrow \frac{\ln(x)}{x^n}$

مبرهنة :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

الإثبات :

(1) بوضع $X = x^n$ يكون $x = X^{\frac{1}{n}}$ و لا $x \leftarrow +\infty$ فإن $X \leftarrow +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(X^{\frac{1}{n}} \right)}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\ln X}{X} = 0$$

(2) لدينا $\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{n \ln(x)}} = e^{x - n \ln(x)}$ و عليه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - n \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(1 - \frac{n \ln(x)}{x} \right)} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

تفسير المبرهنة :

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ فإن العدد $\frac{e^x}{x^n}$ يصبح كبيرا جدا بجوار $(+\infty)$

و بصيغة أخرى من أجل قيم كبرى لـ x العدد x^n يصبح صغيرا جدا أمام e^x من أجل كل عدد طبيعي n .

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ فإن العدد $\frac{\ln(x)}{x^n}$ يصبح صغيرا جدا من أجل قيم كبرى لـ x .

و من أجل قيم كبرى لـ x فإن العدد x^n يصبح كبيرا جدا أمام $\ln(x)$.

نقول عندئذ من أجل قيم كبيرة بالقدر الكافي لـ x أن $x^n > \ln(x) > e^x$.

ملاحظة

المبرهنة تبقى صحيحة في حالة n عدد حقيقي موجب.

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad (2) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) e^x = 0 \quad (4) \quad , \quad n > 0 \quad \text{من أجل كل} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^n = 0 \quad (3)$$

مع $p(x)$ كثير حدود

الإثبات

$$(1) \text{ بوضع } X = \frac{1}{x} \text{ نجد } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{\ln X}{X^n} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{x^n}}} = 0$$

تمرين تدريبي 1

(1) ادرس نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$(a) \quad f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \quad , \quad (b) \quad f(x) = \frac{e^x}{(\ln x)^5} \quad , \quad (c) \quad f(x) = \frac{e^x}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x > 0 \text{ يكون } \frac{\frac{1}{x^3}}{(\ln x)^2} = \left(\frac{\frac{1}{x^6}}{\ln x} \right)^2$$

ثم استنتج نهاية $\frac{1}{x^3} (\ln x)^2$ عند $(+\infty)$

✓ الحل

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \times \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)} = +\infty$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5} \times \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x} \right)^5} = +\infty$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{x} e^x = +\infty$$

$$(2) \quad \frac{\frac{1}{x^3}}{(\ln x)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^6} \right)^2}{(\ln x)^2} = \left(\frac{\frac{1}{x^6}}{\ln x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^6}}{6 \ln \left(\frac{1}{x^6} \right)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{36} \left(\frac{\frac{1}{x^6}}{\ln \left(\frac{1}{x^6} \right)} \right)^2 = +\infty$$

تمرين تدريبي

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ يكون $\frac{e^{5x+3}}{x^2} > \frac{e^x}{x^2}$
 (2) استنتج نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ حيث $f(x) = \frac{e^{5x+3}}{x^2}$

الحل

(1) من أجل كل $x > 0$ يكون $x(5x+3) > x$ و بما أن الدالة \exp متزايدة تماماً فإنه ينتج

$$e^{5x+3} > e^x \text{ وبالقسمة على } x^2 \text{ نجد } \frac{e^{5x+3}}{x^2} > \frac{e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(x^5)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x^5} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(32 \frac{e^{2x}}{(2x)^5} \right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(32 \frac{e^X}{X^5} \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

لأن $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$ حيث $X = 2x$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ و $f(x) \geq \frac{e^x}{x^2}$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تطبيقات نموذجية



تطبيق 1

تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى:

- (أ) $\ln(1-x)$ ، (ب) $\ln(x^3)$ ، (ج) $\frac{1}{x} \ln(1+x)$
 (د) $\ln(2x^2-4)$ ، (هـ) $\ln(2x-4)(3-x)$
 (و) $\ln(2x-4) + \ln(3-x)$ ، (ز) $\ln(x^2+x+1)$

الحل

(أ) حتى يكون للعبارة $\ln(1-x)$ معنى يجب أن يكون $1-x > 0$ أي $x < 1$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty, 1[$

(ب) حتى يكون للعبارة $\ln(x^3)$ معنى يجب أن يكون $x^3 > 0$ أي $x > 0$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]0, +\infty[$

(ج) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x} \ln(1+x)$ معنى يجب أن يكون $1+x > 0$ و $x \neq 0$ أي $x > -1$ و $x \neq 0$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

(د) حتى يكون للعبارة $\ln(2x^2-4)$ معنى يجب أن يكون $2x^2-4 > 0$ أي $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

(هـ) حتى يكون للعبارة $\ln(2x-4)(3-x)$ معنى يجب أن يكون $(2x-4)(3-x) > 0$ أي $x \in]2, 3[$ ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $]2, 3[$

(و) حتى يكون للعبارة $\ln(2x-4) + \ln(3-x)$ معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ و $3-x > 0$ أي $x > 2$ و $x < 3$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, 3[$

(ز) حتى يكون للعبارة $\ln(x^2+x+1)$ معنى يجب أن يكون $x^2+x+1 > 0$ مميز $\Delta = -3$ هو x^2+x+1

ومنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x^2+x+1 > 0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R}$

تطبيق 2

تعيين مجموعة تعريف دوال

في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى :

(أ) $\ln(x^2 + 9x)$ ، (ب) $\ln(|x^2 - 3x + 2|)$

(ج) $\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$ ، (د) $\ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$

(هـ) $\ln(\sqrt{x-1} - 2)$ ، (و) $\ln(x|x-1|)$

(ن) $\frac{\sqrt{x+3}}{\ln(x+1)}$ ، (ي) $\frac{1}{x \ln x}$

✓ الحل

(أ) حتى يكون للعبارة $\ln(x^2 + 9x)$ معنى يجب أن يكون $x^2 + 9x > 0$

$x^2 + 9x > 0$ يكافئ $x \in]-\infty, -9[\cup]0, +\infty[$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-\infty, -9[\cup]0, +\infty[$

(ب) حتى يكون للعبارة $\ln(|x^2 - 3x + 2|)$ معنى يجب أن يكون $|x^2 - 3x + 2| > 0$

$|x^2 - 3x + 2| > 0$ يكافئ $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ يكافئ $(x \neq 1) \text{ و } (x \neq 2)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

(ج) حتى يكون للعبارة $\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)$ معنى يجب أن يكون $|x-1| > 0$ و $|x+1| > 0$

أي $x-1 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$

$(x \neq -1) \text{ و } (x \neq 1)$ يكافئ $(x+1 \neq 0) \text{ و } (x-1 \neq 0)$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

(د) حتى يكون للعبارة $\ln\left(\frac{x-2}{3-x}\right)$ معنى يجب أن يكون $\frac{x-2}{3-x} > 0$ و $3-x \neq 0$

$\frac{x-2}{3-x} > 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in]2, 3[$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, 3[$

(هـ) حتى يكون لـ $\ln(\sqrt{x-1} - 2)$ معنى يجب أن يكون $\sqrt{x-1} - 2 > 0$ و $x-1 \geq 0$

$x-1 \geq 0$ يكافئ $x \geq 1$

$\sqrt{x-1} - 2 > 0$ يكافئ $\sqrt{x-1} > 2$ يكافئ $x-1 > 4$ يكافئ $x > 5$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]5, +\infty[$

(و) حتى تكون للعبارة $\ln(x|x-1|)$ معنى يجب أن يكون $x|x-1| > 0$ (I)

حل التراجحة (I) :

- حالة $x \geq 0$:

التراجحة (I) تكافئ $x^2 - 1 > 0$ تكافئ $x > 1$

ومنه مجموعة الحلول في هذه الحالة هي $]1, +\infty[$

- حالة $x \leq 0$:

التراجحة (II) تكافئ $-x^2 - 1 > 0$ تكافئ $x^2 + 1 < 0$

المتباينة $x^2 + 1 < 0$ خاطئة ومنه مجموعة حلول التراجحة $x|x-1| > 0$ هي \emptyset

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D = \emptyset \cup]1, +\infty[=]1, +\infty[$

(ن) حتى يكون للعبارة $\frac{\sqrt{x+3}}{\ln(x+1)}$ معنى يجب أن يكون $x+3 \geq 0$ و $x+1 > 0$

$\ln(x+1) \neq 0$ وهذا يعني $x \geq -3$ و $x-1 > 0$ و $x+1 \neq 1$

أي $x \geq -3$ و $x \geq -1$ و $x \neq 0$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

(ي) حتى يكون للعبارة $\frac{1}{x \ln x}$ معنى يجب أن يكون $x > 0$ و $\ln(x) \neq 0$

أي $x > 0$ و $x \neq 1$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

تطبيق 3

تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{1}{x} \ln x$ مع a و b

عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، $A(1, 0)$

نقطة من (C_f) ، المماس لـ (C_f) في A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = 3x + 2$

(1) احسب من أجل كل x من $]0, +\infty[$ عبارة $f'(x)$

(2) بين أن $f'(1) = 3$ ، ثم استنتج أن $a + 1 = 3$

(ب) بين أن $a + b = 0$ ، ثم استنتج عبارة $f(x)$

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = a + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = a + \frac{1}{x^2} [-\ln(x) + 1]$$

(2) بما أن المماس للمنحنى (C_f) عند A يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = 3x + 2$

فإن ميله هو 3 وعليه فإن $f'(1) = 3$

لدينا $f'(1) = a + \frac{1}{1^2} [-\ln(1) + 1] = a + 1 = 3$ ومنه نستنتج أن $a + 1 = 3$

(ب) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
 (ج) الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 هما $x \xrightarrow{h_1} \frac{x}{x+1}$ و $x \xrightarrow{h_2} \ln x$ مع $(h = h_2 \circ h_1)$
 ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $H(x) = \frac{(\frac{x}{x+1})'}{(\frac{x}{x+1})} = \frac{1}{x(x+1)}$

تبسيط أعداد باستعمال لوغاريتم الجداء

تطبيق 6

بسط الأعداد التالية :

$$\begin{aligned} & \ln(\sqrt{5}+2) + \ln(\sqrt{5}-2) , \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) , \quad \ln(4) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ & \ln(567) - \ln(72) - \ln\frac{7}{8} + \ln\left(\frac{1}{27}\right) , \quad \ln(\sqrt{17}+4) - \ln(\sqrt{17}-4) \\ & \ln\sqrt{135} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27} , \quad \ln\sqrt{\sqrt{5}+2} + \ln(\sqrt{\sqrt{5}-2}) \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} \ln(4) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) &= \ln\left(4 \times \frac{1}{4}\right) = \ln(1) = 0 \\ \ln\left(\frac{1}{5}\right) &= -\ln(5) \text{ حسب قاعدة لوغاريتم مقلوب، نعد يكون} \\ \ln(\sqrt{5}+2) + \ln(\sqrt{5}-2) &= \ln(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = \ln(5-4) = \ln(1) = 0 \\ \ln(\sqrt{17}+4) - \ln(\sqrt{17}-4) &= \ln\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}+4)}{(\sqrt{17}-4)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{17-16}{(\sqrt{17}-4)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{17}-4)^2}\right) = -2\ln(\sqrt{17}-4) \\ \ln(\sqrt{\sqrt{5}+2}) + \ln(\sqrt{\sqrt{5}-2}) &= \ln(\sqrt{\sqrt{5}+2})(\sqrt{\sqrt{5}-2}) \\ &= \ln(\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}) = \ln(\sqrt{5-4}) = \ln\sqrt{1} = 0 \\ \ln 567 - \ln 72 - \ln\frac{7}{8} + \ln\left(\frac{1}{27}\right) &= \ln(3^3 \times 7) - \ln(2^3 \times 3^2) - \ln\frac{7}{8} - \ln(27) \\ &= 4\ln(3) + \ln(7) - 3\ln(2) - 2\ln(3) - \ln(7) + 3\ln(2) - 3\ln(3) \end{aligned}$$

(ب) بما أن $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f) فإن $f(1)=0$
 $f(1)=0$ يكافئ $a+b=0$

لدينا $\begin{cases} a+1=3 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$ إذن $f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x} \ln(x)$

تعيين اتجاه تغير دالة

تطبيق 4

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{3}{x} + \ln x$
 (1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم احسب $f'(x)$
 (2) شكل جدول تغيرات f ثم استنتج أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) > 0$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-3+x}{x^2}$

(2) إشارة $f'(x)$ من إشارة $-3+x$ لأن المقام موجب تماماً وعليه :

x	0	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	+
تغيرات f		↘	↗

إذا كان $x=3$ فإن $f'(3)=0$
 إذا كان $x > 3$ فإن $f'(x) > 0$
 إذا كان $x < 3$ فإن $f'(x) < 0$
 لدينا $f(3) = 1 + \ln 3$

وبما أن $\ln 3 > 0$ فإن $f(3) > 0$

نستنتج من جدول تغيرات f أنه من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) \geq f(3)$ أي $f(x) > 0$

حساب المشتق

تطبيق 5

h, g, f ثلاث دوال معرفة على $]0, +\infty[$ بـ
 $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x) = x \ln x$
 عيّن $H(x)$, $G(x)$, $F(x)$

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ومن أجل كل $x > 0$ لدينا $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x = 1 + \ln x$

تطبيق 8

تعيين مجموعة تكون فيها مساواة صحيحة

عين مجموعة الأعداد x التي من أجلها تكون المساواة صحيحة في كل حالة من الحالات التالية:

$$\text{أ) } \ln(x^2-1) = \ln(x+1) + \ln(x-1) \quad \text{ب) } \ln(2+x) = \ln x + \ln\left(\frac{2}{x}+1\right)$$

$$\text{ج) } \ln(x^2) = 2 \ln(-x) \quad \text{د) } \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$$

✓ الحل

أ) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$$x > 0 \text{ و } 2+x > 0 \text{ و } \frac{2}{x}+1 > 0$$

$$\text{أي } x > -2 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

إذن مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-2, +\infty[$

ب) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2-1 > 0$ و $x+1 > 0$ و $x-1 > 0$

$$\text{أي } x > 1 \text{ و } x > -1 \text{ و } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]1, +\infty[$

ج) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون:

$$x-2 > 0 \text{ و } x+1 > 0 \text{ و } \frac{x+1}{x-2} > 0$$

$$\text{أي } x > 2 \text{ و } x > -1 \text{ و } x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]2, +\infty[$

د) حتى تكون المساواة صحيحة يجب أن يكون $x^2 > 0$ و $-x > 0$

$$\text{أي } x \in \mathbb{R}^* \text{ و } x \in]-\infty, 0[$$

ومنه مجموعة قيم x المطلوبة هي $D =]-\infty, 0[$

حل معادلات

تطبيق 9

حل المعادلات التالية:

$$\text{أ) } \ln(3x+2) = -1 \quad \text{ب) } \ln(3x+2) = 1 \quad \text{ج) } \ln(3x+2) = 0$$

$$\text{د) } \ln(x-2) + \ln(x-32) = 6 \ln 2 \quad \text{هـ) } \ln(3x-2) = 2$$

$$\text{و) } \ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln 3$$

تطبيق 7

إثبات صحة مساواة

برهن أنه من أجل كل $x > 0$ يكون لدينا:

$$\text{أ) } \ln(2+x^2) = 2 \ln x + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right) \quad \text{ب) } \ln(x+2) = \ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

$$\text{ج) } \ln(x^2+x+1) = 2 \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{د) } \ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

✓ الحل

$$\text{أ) } \ln(x+2) = \ln(x)\left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

$$\text{ب) } \ln(2+x^2) = \ln(x^2)\left(\frac{2}{x^2}+1\right) = \ln x^2 + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

$$= 2 \ln x + \ln\left(\frac{2}{x^2}+1\right)$$

$$\text{ج) } \ln(x^2+x+1) = \ln(x^2)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2 \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{د) } \ln\left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x(x+1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

✓ الحل

(أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2 > 0$ أي $x > -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln(1) \text{ تعني } \ln(3x+2) = 0$$

ومنه نستنتج $3x+2 = 1$ أي $x = -\frac{1}{3}$

بما أن $-\frac{1}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة $\ln(3x+2) = 0$ هي $S = \{-\frac{1}{3}\}$

(ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x+2 > 0$ أي $x > -\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (المجموعة المرجعية) هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln(e) \text{ تعني } \ln(3x+2) = 1$$

ومنه ينتج $3x+2 = e$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{e-2}{3}$

بما أن $\frac{e-2}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{e-2}{3}\}$

(ج) المجموعة المرجعية هي $D =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x+2) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \text{ تكتب } \ln(3x+2) = -1$$

ومنه ينتج $3x+2 = \frac{1}{e}$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{1}{3e} - \frac{2}{3}$

بما أن $\frac{1}{3e} - \frac{2}{3} \in D$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{1}{3e} - \frac{2}{3}\}$

(د) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون $3x-2 > 0$ أي $x > \frac{2}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]\frac{2}{3}, +\infty[$

$$\ln(3x-2) = \ln(e^2) \text{ تكتب } \ln(3x-2) = 2$$

ومنه نستنتج $3x-2 = e^2$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = \frac{e^2+2}{3}$

بما أن $\frac{e^2+2}{3} > \frac{2}{3}$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{\frac{e^2+2}{3}\}$

(هـ) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون

$$x-2 > 0 \text{ و } x-32 > 0 \text{ أي } x > 2 \text{ و } x > 32$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]32, +\infty[$

$$\ln(x-2) + \ln(x-32) = 6 \ln(2) \text{ تكتب } \ln(x-2)(x-32) = \ln(2^6)$$

$$\text{أي } (x-2)(x-32) = 64 \text{ بالتبسيط نجد } x^2 - 34x = 0$$

وبعد حل هذه المعادلة نجد $x = 0$ أو $x = 34$

بما أن 0 لا ينتمي إلى D فهو مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{34\}$

(و) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون

$$-2x+5 > 0 \text{ و } 4x-5 > 0 \text{ أي } x < \frac{5}{2} \text{ و } x > \frac{5}{4}$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]\frac{5}{4}, \frac{5}{2}[$

$$\ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln(3) \text{ تكتب } \ln(-2x+5)(4x-5) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{ومنه ينتج } (-2x+5)(4x-5) = \frac{1}{3} \text{ بالتبسيط نجد } -24x^2 + 90x - 76 = 0$$

ممميز المعادلة $-24x^2 + 90x - 76 = 0$ هو $\Delta = 804$

$$\text{بما أن } \Delta > 0 \text{ فإن للمعادلة حلان } x_1 = \frac{-90 + \sqrt{804}}{-48} \text{ و } x_2 = \frac{-90 - \sqrt{804}}{-48}$$

x_1 و x_2 ينتميان إلى D

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $\ln(-2x+5) + \ln(4x-5) = -\ln 3$ هي $S = \{x_1, x_2\}$

تطبيق 10

حل معادلات

حل المعادلات التالية:

$$(أ) \ln x = \ln(x^2 + 4x) \quad (ب) 2 \ln(x+1) = \ln(x+5) + \ln(2x+2)$$

$$(ج) \ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(x+10)$$

$$(د) \ln(\sqrt{3x-1}) + \ln(\sqrt{x-1}) = \ln(x-2)$$

✓ الحل

(أ) حتى تكون للمساواة معنى يجب أن يكون $x > 0$ و $x^2 + 4x > 0$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]0, +\infty[$

تطبيق 11

حل متراجحات

حل المتراجحات التالية:

(أ) $\ln(2x-4) \geq 0$ (ب) $\ln(2x-4) \geq 1$ (ج) $\ln(x-4) \geq \ln 2$

(د) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 3$ (هـ) $(\ln x)^2 \leq 36$

الحل

- (أ) حتى تكون للمتراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ أي $x > 2$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D =]2, +\infty[$.
- للمتراجحة $\ln(2x-4) \geq 0$ نكتب $\ln(2x-4) \geq \ln 1$ ومنه ينتج $2x-4 \geq 1$ أي $x \geq \frac{5}{2}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[\cap D = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.
- (ب) حتى تكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون $2x-4 > 0$ أي $x > 2$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D =]2, +\infty[$.
- للمتراجحة $\ln(2x-4) \geq 1$ تكافئ $2x-4 \geq e$ أي $x \geq \frac{e+4}{2}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = \left[\frac{e+4}{2}, +\infty\right[\cap D = \left[\frac{e+4}{2}, +\infty\right[$.
- (ج) حتى تكون للمتراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $x-4 > 0$ أي $x > 4$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي $D =]4, +\infty[$.
- للمتراجحة $\ln(x-4) \geq \ln 2$ تكافئ $x-4 \geq 2$ أي $x \geq 6$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S = [6, +\infty[\cap D = [6, +\infty[$.
- (د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $\frac{1}{x} > 0$ و $x > 0$ أي $x \in]0, +\infty[$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D =]0, +\infty[$.
- للمتراجحة $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 3$ تكافئ $\frac{1}{x} \geq e^3$ ومنه ينتج $x \leq \frac{1}{e^3}$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = \left(]0, +\infty[\cap \left(]-\infty, \frac{1}{e^3}]\right) = \left]0, \frac{1}{e^3}\right]$.
- (هـ) حتى يكون للمتراجحة (هـ) معنى يجب أن يكون $x > 0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (هـ) هي $D =]0, +\infty[$.
- للمتراجحة $(\ln x)^2 \leq 36$ تكافئ $-6 \leq \ln x \leq 6$ وهذه الأخيرة تكافئ: $e^{-6} \leq \ln x \leq e^6$ وبما أن الدالة \ln متزايدة تماماً فإنه ينتج $e^{-6} < x < e^6$ إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S = \left(]0, +\infty[\cap \left(]e^{-6}, e^6]\right) = \left]e^{-6}, e^6\right]$.

للمساواة $\ln(x) = \ln(x^2+4x)$ نكتب $x = x^2+4x$ أي $x^2+3x=0$

$x^2+3x=0$ تكافئ $x=0$ أو $x=-3$

بما أن 0 و -3 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة $\ln x = \ln(x^2+4x)$ ليس لها حلول.

(ب) حتى يكون للمساواة معنى يجب أن يكون:

$x+1 > 0$ و $x+5 > 0$ و $2x+2 > 0$ أي $x > -1$ و $x > -5$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]-1, +\infty[$

للمساواة $\ln(x+1)^2 = \ln(x+5)(2x+2)$ نكتب $2\ln(x+1) = \ln(x+5) + \ln(2x+2)$

ومنه ينتج $x^2+10x+9=0$ (1)

بما أن مميز المعادلة (1) هو $\Delta=64$ فإن للمعادلة حلان هما $x_1=-1$ و $x_2=-9$

بما أن x_1 و x_2 لا ينتميان إلى D

فإن المعادلة (ب) ليس لها حلول.

(ج) حتى تكون للمساواة (ج) لها معنى يجب أن يكون:

$x+2 > 0$ و $x+1 > 0$ و $x+10 > 0$

أي x ينتمي إلى $]-1, +\infty[$ ومنه $D =]-1, +\infty[$.

للمساواة $\ln(x+2)(x+1) = \ln(x+10)$ نكتب $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln(x+10)$

ومنه ينتج $(x+2)(x+1) = x+10$ بالتبسيط نجد $x^2+2x-8=0$... (2)

مميز المعادلة (2) هو $\Delta=36$

ومنه المعادلة (2) لها حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-4$

بما أن $2 \in D$ و $-4 \notin D$

فإن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \{2\}$.

(د) حتى تكون للمساواة (د) لها معنى يجب أن يكون:

$3x-1 > 0$ و $x-1 > 0$ و $x-2 > 0$ أي $x > \frac{1}{3}$ و $x > 1$ و $x > 2$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D =]2, +\infty[$.

للمعادلة (د) نكتب على الشكل $\ln(\sqrt{3x-1} \times \sqrt{x-1}) = \ln(x-2)$

أي $\ln \sqrt{(3x-1)(x-1)} = \ln(x-2)$ ومنه ينتج $(\sqrt{3x-1})(x-1) = x-2$

بتربيع الطرفين نجد $(x-1)^2(3x-1) = (x-2)^2$ وبالتبسيط نجد $2x^2-3=0$

حلول المعادلة $2x^2-3=0$ هما $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

بما أن $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ لا ينتميان إلى D

فإن مجموعة حلول المعادلة (د) هي \emptyset .

تطبيق 12

حل متراجحات

حل المتراجحات التالية:

(أ) $3 \ln(x+1) > \ln(3x+1)$ ، (ب) $\ln(3x^2+5x) \geq \ln(6x+10)$ ، (ج) $\ln(4-x) - \ln 3 + \ln x \geq 0$ ، (د) $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

الحل

(أ) حتى يكون للمتراجحة (أ) معنى يجب أن يكون $3x^2+5x > 0$ و $6x+10 > 0$

أي $x > -\frac{5}{3}$ و $x \in]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]0, +\infty[$

إذن مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $D =]0, +\infty[$

المتراجحة $\ln(3x^2+5x) \geq \ln(6x+10)$ تكافئ $3x^2+5x \geq 6x+10$

أي $3x^2-x-10 \geq 0$ (1)

مميز كثير الحدود $(3x^2-x-10)$ هو $\Delta=121$

ومنه للمعادلة $3x^2-x-10=0$ حلان هما $x_1=2$ و $x_2=-\frac{5}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$3x^2-x-10$	+	-	+	+

من الجدول المجاور نستنتج أن

مجموعة حلول المتراجحة (1)

هي:

$S = \left(]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]2, +\infty[\right) \cap]0, +\infty[$

(ب) حتى يكون للمتراجحة (ب) معنى يجب أن يكون:

$x+1 > 0$ و $3x+1 > 0$ أي $x > -1$ و $x > -\frac{1}{3}$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $D =]-\frac{1}{3}, +\infty[$

المتراجحة $3 \ln(x+1) > \ln(3x+1)$ تكافئ $\ln(x+1)^3 > \ln(3x+1)$

ومنه ينتج $(x+1)^3 > 3x+1$ بالتبسيط نجد $x^2(x+3) > 0$ (2)

ومجموعة حلول المتراجحة (2) هي $]-3, 0[\cup]0, +\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = D \cap (]-3, 0[\cup]0, +\infty[) =]-\frac{1}{3}, 0[\cup]0, +\infty[$

(ج) حتى يكون للمتراجحة (ج) معنى يجب أن يكون $3x^2-x > 0$ و $x > 0$ أي:

$x > 0$ و $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (ج) هي $D = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$

المتراجحة (ج) تكتب على الشكل $\ln(3x^2-x) \leq \ln(2x)$ ومنه ينتج $3x^2-x \leq 2x$

بعد التبسيط نجد $3x(x-1) \leq 0$

يكافئ $x \in [0, 1]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S = D \cap [0, 1] = \left] \frac{1}{3}, 1 \right]$

(د) حتى يكون للمتراجحة (د) معنى يجب أن يكون $4-x > 0$ و $x > 0$

أي $x < 4$ و $x > 0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $D =]0, 4[$

المتراجحة (د) تكتب على الشكل $\ln \frac{(4-x)(x)}{3} \geq \ln(1)$ ومنه ينتج $\frac{(4-x)(x)}{3} \geq 1$

بعد التبسيط نجد $-x^2+4x-3 \geq 0$ (2)

مميز $(-x^2+4x-3)$ هو 4 ومنه للمعادلة $-x^2+4x-3=0$ حلان هما 1 و 3

$-x^2+4x-3 \geq 0$ إذا وفقط إذا كان $x \in [1, 3]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S = D \cap [1, 3] = [1, 3]$

تطبيق 13

حل معادلات تشمل القيمة المطلقة

حل المعادلات التالية:

(أ) $\ln(|x-1|) + \ln(x+5) = 3 \ln(2)$ ، (ب) $\ln|x-1| + \ln|x+1| = 0$

(ج) $\ln(|2x+5|) + \ln(|x|) = 2 \ln(|x+1|)$

(د) $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + 1 = 0$

الحل

(أ) حتى يكون للمعادلة (أ) معنى يجب أن يكون $|x-1| > 0$ و $x+5 > 0$

أي $x \neq 1$ و $x \neq -5$

ومنه مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -5\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $\ln(|x-1|(x+5)) = \ln(8)$ ومنه ينتج (1) $|x^2-1|=1$

يكافئ $|x^2-1|=1$ أي $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$ أو $x = 0$

ومنه حلول المعادلة (1) هي $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

بما أن $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ينتميان إلى D فإن مجموعة حلول المعادلة (أ) هي:

$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\}$

(ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $D =]-5, 1[\cup]1, +\infty[$.
المعادلة (ب) تكتب $\ln|x-1|(x+5) = \ln(8)$ منه ينتج $|x-1|(x+5) = 8 \dots (2)$

- إذا كان $x < 1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2 + 4x + 3 = 0$
وحلا هذه الأخيرة هما $x = -1$ و $x = -3$
وبما أن -1 و -3 ينتميان إلى $] -5, 1[$ فهما مقبولان.

- إذا كان $x > 1$ فإن المعادلة (2) تكتب $x^2 + 4x - 13 = 0$
وحلا هذه الأخيرة هما $\frac{-4+2\sqrt{17}}{2}$ و $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$
 $\frac{-4-2\sqrt{17}}{2}$ مرفوض لأنه ليس أكبر من الواحد.

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S = \left\{ \frac{-4+2\sqrt{17}}{2}, -1, -3 \right\}$

(ج) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $|2x+5| > 0$ و $|x| > 0$ و $|x+1| > 0$
أي $x \neq -1$ و $x \neq 0$ و $x \neq -\frac{5}{2}$

ومنه فإن مجموعة تعريف المعادلة (ج) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2}, 0, -1 \right\}$

المعادلة (ج) تكتب على الشكل $\ln(|2x+5| |x|) = \ln(|x+1|^2)$
ومنه ينتج $|x(2x+5)| = (x+1)^2 \dots (3)$

- إذا كان $x \in]-\frac{5}{2}, -1[\cup]-1, 0[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل $3x^2 + 7x + 1 = 0$

وحلا هذه الأخيرة هما $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$
 x_1 و x_2 ينتميان إلى $]-\frac{5}{2}, 0[- \{-1\}$ فهما مقبولان

- إذا كان $x \in]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}[$ فإن المعادلة (3) تكتب على الشكل

$x^2 + 3x - 1 = 0$ وحلا هذه الأخيرة هما $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

x_3 و x_4 مقبولان لأنهما ينتميان إلى $]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}[$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ج) هي $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

(د) حتى يكون للمعادلة (د) معنى يجب أن يكون $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 0$ و $x-1 \neq 0$

أي $x \neq -2$ و $x \neq 1$ ومنه مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $D = \mathbb{R} - \{1, -2\}$

المعادلة (د) تكتب على الشكل $\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) = \ln e^{-1}$ ومنه ينتج (4) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = e^{-1}$

- إذا كان $x \in]-2, 1[$ فإن المعادلة (4) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} = -e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x = \frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}$ وهذا الحل مقبول لأنه ينتمي إلى $] -2, 1[$

- إذا كان $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ فإن المعادلة (4) تكتب $\frac{x+2}{x-1} = e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x = \frac{2e+1}{1-e}$ وهذا حل مقبول لأنه ينتمي إلى $] -\infty, -2[$

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S = \left\{ \frac{e^{-1}-2}{1+e^{-1}}, \frac{2e+1}{1-e} \right\}$

تطبيق 14

حل متراجحات تشمل القيمة المطلقة

حل المتراجحات التالية:

(أ) $\ln|x+2| - \ln|x-1| + 1 > 0$ (ب) $\ln(|x-1|) + \ln|x+1| \leq 0$

(ج) $\ln(|2x+5|) + \ln(|x|) \geq 2\ln(|x+1|)$

الحل

(أ) المجموعة المرجعية للمتراجحة (أ) هي $D = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ تكتب على الشكل:

$\ln(|x-1|) + \ln|x+1| \leq 0$ ومنه ينتج $|x-1|(x+1) \leq 1 \dots (1)$

- إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \geq 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S_1 =]-1, 1[$

- إذا كان $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن المتراجحة (1) تصبح $x^2 \leq 2$

ومجموعة حلولها هي $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S_2 =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S = S_1 \cup S_2$

(ب) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ب) هي $D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

من أجل كل x من D المتراجحة (ب) تكتب على الشكل:

$\ln\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|\right) \geq \ln(e^{-1})$ ومنه ينتج (2) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq e^{-1}$

- إذا كان $x \in]-2, 1[$ فإن المتراجحة (2) تكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$

بالتبسيط نجد $x \geq \frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي $S_1 = \left[\frac{e^{-1}-2}{e^{-1}+1}, 1 \right]$

- إذا كان $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ فإن المتراجحة (2) نكتب على الشكل $\frac{x+2}{x-1} \geq e^{-1}$ بالتبسيط نجد $\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)} \geq 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $S_2 =]-\infty, \frac{2e+1}{1-e}] \cup]1, +\infty[$

x	$-\infty$	$\frac{2e+1}{1-e}$	-2	1	$+\infty$
$\frac{(e-1)x+2e+1}{e(x-1)}$	+	+	-	-	+

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S = S_1 \cup S_2$

(ج) المجموعة المرجعية للمتراجحة (ج) هي $D = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2}, 0, -1 \right\}$

من أجل كل x من D للمتراجحة (ج) نكتب على الشكل:

$$\ln(|2x+5|) |x| \geq \ln(|x+2|)^2$$

ومنه ينتج $|x(2x+5)| \geq (x+1)^2$ (3)...

- إذا كان $x \in]-\frac{5}{2}, 0[- \{-1\}$ فإن (3) نكتب على الشكل $3x^2+7x+1 \leq 0$ ومجموعة

حلول هذه الأخيرة هي $S_1 = [x_2, x_1] - \{-1\}$ مع $x_1 = \frac{-7+\sqrt{37}}{6}$ و $x_2 = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

- إذا كان $x \in]0, +\infty[\cup]-\infty, -\frac{5}{2}]$ فإن (3) نكتب على الشكل $x^2+3x-1 \geq 0$

ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي $S_2 =]-\infty, x_4] \cup [x_3, +\infty[$

حيث $x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ و $x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S = S_1 \cup S_2$

تطبيق 15

حل معادلات ومتراجحات

(1) حل المعادلة $x^2+4x-5=0$ (1)

(2) لتكن $g(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 5$ حيث

بوضع $X = \ln(x)$ ، حل المعادلة $g(x) = 0$ (2)

(3) حل المتراجحة $g(x) \geq 0$ (3)

الحل

(1) مميز المعادلة (1) هو $\Delta = 36$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -5$

(2) $g(x) = 0$ يكافئ $X^2+4X-5=0$ يكافئ $(X-1)(X+5)=0$ أو $(X=1)$ أو $(X=-5)$

$X=1$ يكافئ $\ln x = \ln e$ يكافئ $x=e$

$X=-5$ يكافئ $\ln x = \ln e^{-5}$ يكافئ $x=e^{-5}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $g(x)=0$ هي $S = \{e, e^{-5}\}$

(3) $g(x) = X^2+4X-5 = (X-1)(X+5) = (\ln(x)-1)(\ln(x)+5)$

x	$-\infty$	e^{-5}	e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	-	-	+	-
$\ln(x)+5$	-	-	+	+
$g(x)$	+	+	-	+

$g(x) \geq 0$ يكافئ $x \in]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $g(x) \geq 0$ هي $]-\infty, e^{-5}] \cup [e, +\infty[$

تطبيق 16

حل معادلات ومتراجحات

من أجل كل x من \mathbb{R} نضع $p(x) = 2x^3+3x^2+x-6$

(1) تحقق أن $p(1) = 0$

(ب) استنتج أنه نستطيع كتابة $p(x) = (x-1)\varphi(x)$

وهذا من أجل كل x من \mathbb{R} مع $\varphi(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

(ج) حل المتراجحة $p(x) \leq 0$

(2) استعمل النتائج السابقة لحل المتراجحة

(f) ... $2 \ln x + \ln(2x+3) \leq \ln(6-x)$

الحل

(1) لدينا $p(1) = 2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$

(ب) بما أن 1 جذر $p(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $\varphi(x)$ درجته 2

بحيث من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $p(x) = (x-1)\varphi(x)$ و $\varphi(x) = ax^2+bx+c$

بما أن معامل x^3 في $p(x)$ هو 2 فإن $a=2$

بعد نشر $\varphi(x)(x-1)$ ومطابقته مع $p(x)$ نجد $b=5$ و $c=6$

إذن $p(x) = (x-1)(2x^2+5x+6)$

ج) لحل المزاجحة $p(x) \leq 0$ نعين إشارة $p(x)$
 $p(x) = 0$ يكافئ $(x=1)$ أو $(2x^2+5x+6=0)$
 مميز المعادلة $2x^2+5x+6=0$ يساوي -23
 ومنه المعادلة $2x^2+5x+6=0$ ليس لها حلول وإشارة $(2x^2+5x+6)$ موجبة تماما.
 $p(x) \leq 0$ إذا و فقط إذا كان $x \leq 1$
 ومنه مجموعة حلول المزاجحة $p(x) \leq 0$ هي $S =]-\infty, 1]$

2) مجموعة تعريف المزاجحة (I) هي $D =]0, 6[$
 من أجل كل x^* من D المزاجحة (I) تكتب على الشكل:
 $\ln(x^2)(2x+3) \leq \ln(6-x)$ و منه ينتج $2x^3+3x^2+x-6 \leq 0$ (II)
 مجموعة حلول المزاجحة (II) هي $]-\infty, 1]$
 وبالتالي مجموعة حلول المزاجحة (I) هي:
 $S' =]0, 1] \cap]-\infty, 1] =]0, 1]$

تطبيق 17 حل جملة معادلات

(I) حل الجملة $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ x-7y=-5 \end{cases}$
 (II) استنتج حل الجملة $\begin{cases} 3\ln x+5\ln y=11 \\ \ln x-7\ln y=-5 \end{cases}$

✓ الحل

1) $\begin{cases} 3x+5y=11 \dots (1) \\ x-7y=-5 \dots (2) \end{cases}$ بضرب (2) في -3 ثم نجمعها مع (1) نجد $26y=26$

ومنه $y=1$ و بتعويض قيمة y أي (1) نجد $x=2$
 إذن مجموعة حلول الجملة (I) هي $S = \{(2, 1)\}$

2) مجموعة تعريف الجملة (II) هي مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث $x > 0$ و $y > 0$

بوضع $X = \ln x$ و $Y = \ln y$ الجملة (II) تصبح كما يلي $\begin{cases} 3X+5Y=11 \\ X-7Y=-5 \end{cases}$

من السؤال الأول نجد $X=2$ و $Y=1$

$X=2$ يكافئ $\ln x=2$ يكافئ $x=e^2$

$Y=1$ يكافئ $\ln y=1$ يكافئ $y=e$

ومنه مجموعة حلول الجملة (II) هي $S_2 = \{(e^2, e)\}$

تطبيق 18

حل جملة معادلتين

(I) حل في \mathbb{R}^2 الجملة التالية $\begin{cases} xy=4 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2 \end{cases}$
 (2) حل في \mathbb{R}^2 الجملة التالية:
 (II) $\begin{cases} x+y=19 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 15 \end{cases}$

✓ الحل

1) مجموعة التعريف الجملة (I) هي مجموعة الثنائيات (x, y) بحيث $x > 0$ و $y > 0$.

(I) $\begin{cases} xy=4 \dots (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2 \dots (2) \end{cases}$

من (1) نجد $y = \frac{4}{x}$ نعوضه في (2) نجد $(\ln x)^2 + \left(\ln \frac{4}{x}\right)^2 = \frac{5}{2}(\ln 2)^2$

بعد التبسيط نجد (*) $2(\ln x)^2 - (4\ln 2) \times (\ln x) + \frac{3}{2}(\ln 2)^2 = 0$

بوضع $\ln(x) = X$ في (*) نجد (**) $2X^2 - (4\ln 2)X + \frac{3}{2}(\ln 2)^2 = 0$

مميز المعادلة (**) هو $\Delta = (2\ln 2)^2$

إذن المعادلة (**) لها حلان هما $X_1 = \frac{3}{2}\ln 2 = \ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right)$ و $X_2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

$\ln x = X_1$ يكافئ $x = e^{X_1} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

$\ln x = X_2$ يكافئ $x = e^{X_2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

أو $x = 2\sqrt{2}$ فإن $y = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

أو $x = \sqrt{2}$ فإن $y = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

ومنه مجموعة حلول الجملة (I) هي $S = \{(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (2\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

(II) $\begin{cases} x+y=19 \dots (3) \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 15 \dots (4) \end{cases}$

مجموعة تعريف الجملة (II) هي $D = (\mathbb{R}^+)^2$

من (3) نجد $y = 19 - x$ نعوض y في (4) نجد $\ln x + \ln(19-x) = \ln 4 + \ln 15$

وحسب قواعد جداء اللوغاريتمات نجد $\ln(-x^2+19x) = \ln 60$

(2) إحداثيتا النقطة I منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{\ln a + \ln b}{2}\right)$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

فإن النقطة $M\left(\frac{a+b}{2}, \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ من (C_f) تقع فوق النقطة I وهذا يعني أن الدالة \ln محدبة.

تطبيق 19

تحدد الدالة \ln

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I ونحيت من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I نقول عن f أنها محدبة.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad b > 0 \text{ و } a > 0 \text{ يكون}$$

(ب) استنتج أنه من أجل كل $a > 0$ و $b > 0$ يكون

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[\ln a + \ln b]$$

(2) أنشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة $x \mapsto \ln x$ مميذا عليه نقطتين A و B فاصلتيهما a و b على التوالي. ما هي وضعية منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى (C_f) ؟

الحل ✓

$$(1) \text{ نعلم أن } a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \text{ و عليه يكون } a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

بإضافة $4ab$ إلى طرفي المتباينة نجد $a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} \geq ab \text{ نجد}$$

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}} \geq \sqrt{ab} \text{ نجد}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

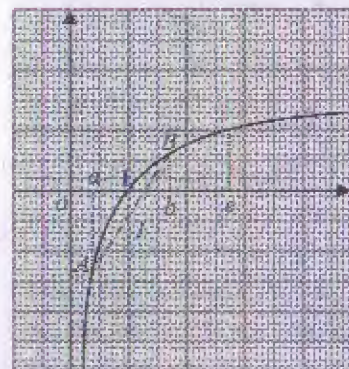
(ب) لدينا $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ وبما أن الدالة \ln

متزايدة تماماً على $]0, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln\sqrt{ab} \text{ ولكن،}$$

$$\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}[\ln a + \ln b]$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[\ln a + \ln b] \text{ إذن}$$



الحل ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad (ج)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty \quad (د)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1} = 0 \quad (هـ)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

حساب النهايات

تطبيق 20

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f في المكان العطلي.

$$x=0, f(x) = \frac{x + \ln x}{x} \quad (ب) \quad x=0, f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$x=0, f(x) = \frac{1}{x} - \ln x \quad (ج) \quad x=0, f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (د) \quad \text{عند } (+\infty)$$

$$x=0, f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad (و) \quad \text{عند } (+\infty) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$

$$\text{عند } (+\infty) \quad f(x) = 2x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (ن)$$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\ln x} = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0^+$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

(هـ) $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow e} (x+1) = e+1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x) \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \times \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x} - 1} = -\infty$$

حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

تطبيق 22

عين في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f في المكان المعطى

(أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند $x=1$ ، (ب) $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$

(ج) $f(x) = \frac{x+1+\ln(x+2)}{x+1}$ عند $x=-1$ ، (د) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2-1}$ عند $x=1$

الحل

(أ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x) = \ln x$ تكون $f(x) = \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق عند 1

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$

(و) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0^+$

(ن) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \ln(1+x) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$

$X = \frac{1}{x}$ ولما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $X \rightarrow 0$.

حساب النهايات

تطبيق 21

في كل حالة من الحالات التالية عين نهاية الدالة f عند أطراف المجال I

(أ) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = x(2 - \ln x)$

(ب) $I =]-\infty, -3[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

(ج) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+2}{\ln x}$

(د) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$

(هـ) $I =]e, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+1}{1-\ln x}$

الحل

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [2x - x \ln(x)] = 0$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$

(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x-2} = 0^+$

الحل ✓

(1) حتى يكون (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0$$

إذن $(\Delta): y = x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

(2) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $d(x)$

$$d(x) = f(x) - (x+3)$$

$$d(x) = f(x) - (x+3) = \frac{-\ln(x)}{x}$$

$$d(x) = 0 \text{ يكافئ } \ln(x) = 0 \text{ يكافئ } x = 1$$

إذا كان $x > 1$ فإن $d(x) < 0$ ومنه (Δ) يقع فوق (C_f)

وإذا كان $x < 1$ فإن $d(x) > 0$ ومنه (Δ) يقع تحت (C_f)

(Δ) يقطع (C_f) في النقطة $A(1, 4)$.

تطبيق 24 دراسة قابلية الاشتقاق

(1) f دالة معرفة على $I = [-1, +\infty[$ بـ

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 [1 - \ln(x+1)] & , x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

الدرس قابلية اشتقاق f عند $x = -1$

(2) g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

إذا كان $x \neq 1$ و $g(1) = 0$ الدرس قابلية اشتقاق g عند 1.

الحل ✓

(1) حتى تقبل الدالة f الاشتقاق عند $x = -1$ يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \ell$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) [1 - \ln(x+1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) - (x+1) \ln(x+1)] = 0 = \ell$$

إذن f قابلة للاشتقاق عند العدد -1

(2) حتى تقبل الدالة g الاشتقاق عند 1 يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \ell$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه $g'(1) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times 0$ حالة عدم التعيين

بوضع $X = \frac{1}{x}$ تكون $f(x) = \frac{\ln(1+X)}{X}$ ولما $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow 0$

$$\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{g(X) - g(0)}{X - 0} \text{ تصبح } g(X) = \ln(1+X)$$

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 ولدينا $g'(0) = 1$

$$g'(0) = 1 \text{ نجد } g'(X) = \frac{1}{X+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = g'(0) = 1$$
 وبالتالي

(ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x) = x+1 + \ln(x+2)$ نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = g'(-1) = 2$$

من أجل كل x من $]-2, +\infty[$ لدينا $g'(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = 2 \text{ إذن } g'(-1) = 2$$

(د) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

بوضع $g(x) = \ln(x) - 1$ نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

تطبيق 25 المستقيم المقارب المائل ووضعيته بالنسبة لمنحنى

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + 3 - \frac{\ln x}{x}$

(1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+3$ مقارب مائل لـ (C_f)

(2) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x-1} = 1 \times (\infty) = \infty$$

ومنه الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 1.

تطبيق 25

مشتق الدالة المركبة

في كل حالة من الحالات التالية تحقق أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من I ثم أحسب $f'(x)$

(أ) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \ln(2 + x^2)$

(ب) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(ج) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = x - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(د) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \ln(\ln x)$

الحل ✓

(أ) الدالة $x \mapsto 2 + x^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $u(x) > 0$ ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ومن أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{2x}{2+x^2}$

(ب) الدالة $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و $]1, +\infty[\subset D_u$

ومن أجل كل x من $]1, +\infty[$ يكون $u(x) > 0$

إذن الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$

ولدينا $f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

(ج) الدالة $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ومن أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $u(x) > 0$ ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ولدينا $(\ln \circ u)'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$

- الدالة $x \mapsto -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وهما $x \mapsto -x$ و $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$

هما $x \mapsto f_1(x)$ و $x \mapsto x$ ومن أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = 1 - \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} \times x \right] = 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$$

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$

ومن أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا $u(x) > 0$

ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$

ولدينا $f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

حل معادلات ومراجعات

تطبيق 26

في كل حالة من الحالات التالية حل المراجعات والمعادلات ذات المجهول x

(أ) $2^x \leq 100$ ، x عدد طبيعي . (ب) $4^x = 10000$ ، x عدد حقيقي

(ج) $(0, 25)^x = 1$ ، x عدد حقيقي . (د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0,2$ ، x عدد حقيقي

الحل ✓

(أ) $2^x \leq 100$ يكافئ $\ln(2^x) \leq \ln(100)$

يكافئ $x \ln(2) \leq \ln(100)$

يكافئ $x \leq \frac{\ln(100)}{\ln(2)}$

ومنه مجموعة حلول المراجعة (أ) هي $\{0, 1, \dots, 66\}$

(ب) $4^x = 10000$ يكافئ $x \ln(4) = \ln(10000)$ يكافئ $x = \frac{\ln(10000)}{\ln(4)}$

(ج) $(0, 25)^x = 1$ يكافئ $x \ln(0, 25) = 0$ يكافئ $x = 0$

(د) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0,2$ يكافئ $x \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(0, 2)$

يكافئ $x \geq \frac{\ln(0, 2)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

ومنه مجموعة حلول المراجعة (د) هي $\left[\frac{\ln(0, 2)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}, +\infty \right[$

إذن كل الخواص المتعلقة بالدالة \ln تبقى صحيحة بالنسبة إلى الدالة g .

12 الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

حالة $a > 1$

- إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ ومنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) > 0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+
تغيرات g		$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

- حالة $0 < a < 1$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$

بما أن $\ln a < 0$ فإنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ يكون $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-
تغيرات g		$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

(γ_c) له مستقيم مقارب

معادلته $x = 0$

(γ_c) يقطع (x, x) في النقطة (1, 0) ويمر أيضا من النقطة (e, 1).

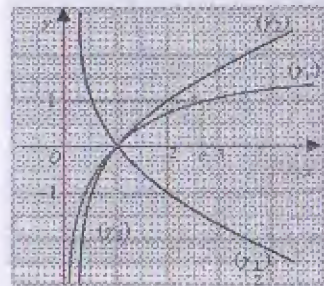
• ($\gamma_{\frac{1}{2}}$) يمر من النقطة (1, 0) والنقطة (2, -1).

وله مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

• (γ_2) يمر من النقطتين (1, 0) و (2, 1).

($\gamma_{\frac{1}{2}}$) هو نظير (γ_2) بالنسبة إلى محور الفواصل

وبصفة عامة ($\gamma_{\frac{1}{a}}$) نظير (γ_a) بالنسبة إلى محور الفواصل



رسم التمثيل البياني للدالة \ln

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ بالعبارة $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

(1) بين أن الدالة f فردية.

تطبيق 27

حصر أعداد بواسطة قوة العدد 10

إذا علمت أن $\log a = 4.42$ و $\log b = 3.68$ اعط حصرًا للأعداد a و b بواسطة قوى للعدد 10. ثم حصرًا للأعداد $a^2, a^3, \frac{a}{b}, \frac{a}{b^2}$.

✓ الحل

- من المتباينة $\log a \geq 4$ ينتج $a \geq 10^4$

- من المتباينة $\log b \geq 3$ ينتج $b \geq 10^3$

- لدينا $\log a - \log b = 0.74$ أي $\log \frac{a}{b} = 0.74$

وبما أن $\log \frac{a}{b} \geq 0$ فإن $\frac{a}{b} \geq 10^0$

- لدينا $\log a^2 = 2 \log a = 8.84$ إذن $\log a^2 \geq 8$ و $a^2 \geq 10^8$

- لدينا $\log(ab) = \log a + \log b = 8.10$ إذن $\log(ab) \geq 8$

وعليه يكون $ab \geq 10^8$

- لدينا $\log a^3 = 3 \log a = 13.26$ إذن $\log a^3 \geq 13$ وعليه يكون $a^3 \geq 10^{13}$

تطبيق 28

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a

ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن 1 ولتكن g دالة معرفة من

أحل $x > 0$ بالعبارة $g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

(1) أحسب $g(a)$ ثم بين أن $g(b \times c) = g(b) + g(c)$

(2) عيّن اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها حسب قيم a .

(3) ليكن (γ_a) المنحنى البياني للدالة g في مستوى منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ارسم (γ_2), ($\gamma_{\frac{1}{2}}$) في نفس المعلم

✓ الحل

(1) $g(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$

$g(b \times c) = \frac{\ln(b \times c)}{\ln a} = \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln c}{\ln a} = g(b) + g(c)$

- (2) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$
 (3) ادرس تغيرات الدالة f على $[0, 1]$ ثم ارسم منحناها.

الحل

(1) f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من أجل كل x من $]-1, 1[$

فإن $-x$ من $]-1, 1[$ و $f(-x) = -f(x)$
 إذا كان $x \in]-1, 1[$ فإن $-x \in]-1, 1[$

و $f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1-x}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$ ومنه f فردية.

(2) الدالة $u: x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$ ولدينا $u(x) > 0$

ومنه الدالة $f = \ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$

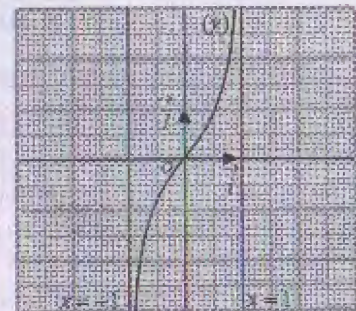
(3) دراسة تغيرات f على $[0, 1]$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $f(0) = 0$

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1, 1[$ ولدينا $f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)}$

من أجل كل x من $[0, 1]$ يكون $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على $[0, 1]$

بما أن الدالة f فردية نرسم بيائها على المجال $]-1, 1[$ ونتم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى البدا $O(0, 0)$
 $x=1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي (y')

x	0	1
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f		$+\infty$



تطبيق 30 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

(1) f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln(x) - x$

(أ) ادرس تغيرات الدالة f

(ب) أحسب (أ) f ثم استنتج إشارة $f(x)$.

(2) باستعمال السؤال (1) ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$

بالعلاقة $g(x) = (\ln x)^2 - 2x$

(ب) ارسم (أ) g ببيان الدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

الحل

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ عدم التعيين

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x=1$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-
تغيرات f		0	$-\infty$

- إذا كان $x > 1$ فإن

$f'(x) < 0$ ومنه f

متناقصة تماماً على

$]1, +\infty[$

- إذا كان $x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[0, 1]$

(ب) من جدول تغيرات f نستنتج أنه من أجل كل x من $[0, +\infty[$ يكون $f(x) \leq 0$.

(2) دراسة تغيرات g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{2}{x} \ln x - 2$

ومنه $g'(x) = \frac{2}{x} (\ln(x) - x)$ أي $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$

$g'(x) = 0$ يكافئ $f(x) = 0$ يكافئ $x=1$

من أجل كل x من $[1, +\infty[$ يكون $g'(x) < 0$

إذن $g'(x)$ سالب وينعدم عند $x=1$ ومنه الدالة g متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ عدم التعيين

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		-	-
تغيرات g		$+\infty$	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{x})^2)^2 - 2(\sqrt{x})^2$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 (\ln(\sqrt{x}))^2 - 2(\sqrt{x})^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

اتجاه تغير f

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} \text{ ولدينا } I \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0 \text{ يكافئ } (x-2) \text{ أو } (x+1)$$

$$x = -1 \text{ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى } I \text{ وبالتالي } f'(2) = 0$$

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ على } I \text{ هي نفس إشارة } (x^2 - x - 2)$$

- إذا كان $x \in]1, 2[$ فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على $[1, 2]$

- إذا كان $x \in]2, +\infty[$ فإن $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $[2, +\infty[$

x	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(2)$	$+\infty$

$$f(2) = 2 \ln(2)$$

$$f(2) \approx 1,38$$

$$(1) \text{ معادلة } y = x - 2$$

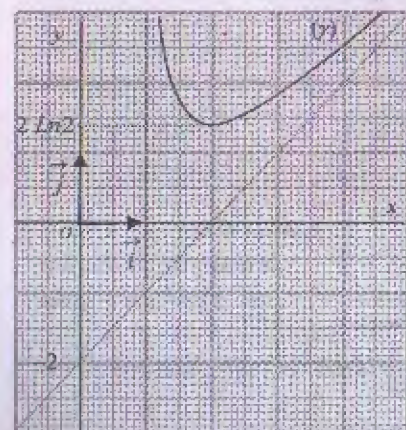
مستقيم مقارب لـ (y) إذا و

فقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$



(ب) لدراسة وضعية (y) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة القدر $f(x) - (x-2)$ على I .

$$f(x) - (x-2) = 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x \in I$ يكون $x > x-1$

بالقلب نجد $1 < \frac{x}{x-1}$ و منه ينتج

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln(1)$$

$$\text{أي } 0 < \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

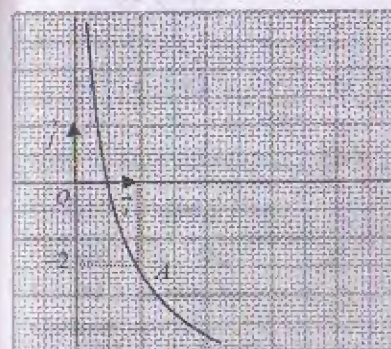
$$\text{إذن } f(x) - (x-2) > 0$$

وهذا يعني أن المنحنى (y) يقع فوق المستقيم (Δ)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 (\sqrt{x})^2 \left[\frac{2 (\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 (\sqrt{x})^2 \left[2 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 - 1 \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 (\sqrt{x})^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = 0$$



(ب) للمستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2x) = +\infty$$

إذن المنحنى (C_g) ليس له مستقيم مقارب مائل.

- بما أن $g'(x)$ ينعدم عند $x = 1$

ولا يغير إشارته في جوار 1 فإن النقطة

$$A(1, -2) \text{ نقطة إنعطاف لـ } (C_g)$$

و المماس عندها يخترق المنحنى (C_g)

تطبيق 31 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

تطبيق 31

f دالة معرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ بالعبارة التالية:

$$f(x) = x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2)

(أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل

للمنحنى (y) الممثل للدالة f .

(ب) ادرس وضعية (y) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم بالتدقيق (y) و (Δ)

في نفس العلم.

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x}{x-1} = +\infty \text{ لأن}$$

تطبيق 31

دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

دالة معرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ ، بالعلاقة التالية :

$$f(x) = x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

- (1) ادرس تغيرات الدالة f
- (2) بين أن المستقيم $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (γ) الممثل للدالة f
- (ب) ادرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (γ) و (Δ) في نفس العلم.

الحل ✓

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x}{x-1} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$$

اتجاه تغير f :

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} \quad \text{ولدينا}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{يكافئ} \quad (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1 \quad \text{مرفوض لأنه لا ينتمي إلى} \quad I \quad \text{و بالتالي} \quad f'(2) = 0$$

$$\text{إشارة } f'(x) \text{ على } I \text{ هي نفس إشارة } (x^2 - x - 2)$$

$$- \text{ إذا كان } x \in]1, 2[\text{ فإن } f'(x) < 0 \text{ وبالتالي } f \text{ متناقصة تماما على }]1, 2[$$

$$- \text{ إذا كان } x \in]2, +\infty[\text{ فإن } f'(x) > 0 \text{ وبالتالي } f \text{ متزايدة تماما على }]2, +\infty[$$

$$f(2) = 2 \ln(2)$$

$$f(2) \approx 1,38$$

x	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(2)$	$+\infty$

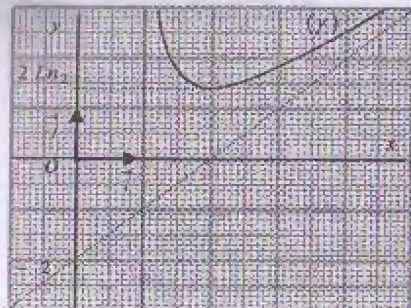
$$(2) \quad y = x - 2 \text{ معادلة مستقيم}$$

$$\text{مقارب لـ } (\gamma) \text{ إذا وفقط إذا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - x + 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

$$(ب) \text{ لدراسة وضعية } (\gamma) \text{ بالنسبة إلى } (\Delta) \text{ ندرس إشارة القدار } f(x) - (x-2) \text{ على } I$$



$$f(x) - (x-2) = 2 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

من أجل كل $x \in I$ يكون $x > x-1$

بالقلب نجد $\frac{x}{x-1} > 1$ ومنه ينتج

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \quad \text{أي} \quad \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > \ln(1)$$

$$\text{إذن} \quad f(x) - (x-2) > 0$$

و هذا يعني أن المنحنى (γ) يقع فوق للمستقيم (Δ)

تطبيق 32

دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد

دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $f(0) = 1$ ومن أجل $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(1) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ :

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن من أجل كل x من $[0, +\infty[$ يكون :

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(ج) بطريقة مماثلة بين أنه إذا كان $x \geq 0$ فإن $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

$$(د) \text{ تحقق أن من أجل كل } x > 0 \text{ يكون } \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq \frac{-1}{2} + \frac{x}{3}$$

(هـ) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن $f'(0) = \frac{-1}{2}$

الحل ✓

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{عدم التعيين}$$

$$\text{بوضع } \kappa(x) = \ln(1+x) \quad \kappa(0) = 0 \quad \text{نجد} \quad \kappa'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{ومن ثم} \quad \frac{\kappa(x) - \kappa(0)}{x - 0} = \frac{\kappa(x)}{x} = \frac{1}{1+x}$$

الدالة κ قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق عند الصفر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر و $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

تطبيق 33 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

- $f(x) = (x+1) \ln(x-3)$ بـ $]3, +\infty[$ دالة معرفة على المجال
- و (f) منحنىها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول هي 1cm)
- (1) تحقق أنه من أجل $x > 3$ يكون $f''(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x-3)$
- (2) احسب $f''(x)$ حيث f'' المشتق الثاني للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير f'
- (3) عين إشارة $f''(x)$ على المجال $]3, +\infty[$.
- (4) ادرس نهاية f عند أطراف المجال $]3, +\infty[$ ثم حدد المستقيمات المقاربة لـ (f)
- بـ شكل جدول تغيرات الدالة f
- (5) عين نقط تقاطع (f) مع (xx') ثم ارسم (f) .

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]3, +\infty[$ ولدينا $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x-3)$

(2) الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]3, +\infty[$ ولدينا $f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$

$x=7$ تكافئ $f''(x)=0$

إذا كان $x > 7$ فإن $f''(x) > 0$ بالتالي f' متزايدة تماماً على $[7, +\infty[$.

إذا كان $3 < x < 7$ فإن $f''(x) < 0$ وبالتالي f' متناقصة تماماً على $]3, 7]$.

(3) بما أن $f''(x)$ موجبة على $[7, +\infty[$ وسالبة على $]3, 7]$ و $f''(7)=0$ فإن الدالة f' لها قيمة حدية صغرى هي $f'(7)$ على المجال $]3, +\infty[$.

بالتالي من أجل كل $x \in]3, +\infty[$ يكون $f'(x) \geq f'(7)$

وبما أن $f'(7) = \frac{8}{2} + 2 \ln(2)$ أي $f'(7) > 0$ فإن $f'(x) > 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-3) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \ln(x-3) = +\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\kappa(x) - \kappa(0)}{x - 0} = \kappa'(0)$ لكن $\kappa'(x) = \frac{1}{1+x}$ إذن $\kappa'(0) = 1$ وعليه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\kappa(x) - \kappa(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ مما يفسران f مستمرة من اليمين عند 0.

(2) ا) g قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{x+1} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{x+1}$

بما أن $x \geq 0$ فإن $g'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$.

ب) بما أن $g(0) = 0$ و g متناقصة تماماً على $[0, +\infty[$

فإنه من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ يكون $g(x) \leq 0$

وهذا يعني أن $\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] \leq 0$ أي $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

ج) نضع $d(x) = \ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]$

ندرس اتجاه تغير d على $I = [0, +\infty[$

الدالة d قابلة للاشتقاق على I

وأنه من أجل كل x من I لدينا $d'(x) = \frac{x^2}{1+x}$

بما أن $x \geq 0$ فإن $\frac{x^2}{1+x} \geq 0$

وهذا يعني أن $d'(x) \geq 0$ إذن فإن الدالة d متزايدة تماماً على $[0, +\infty[$.

بما أن $d(0) = 0$ و d متزايدة تماماً على I

فإنه من أجل كل $x \geq 0$ لدينا $d(x) \geq 0$

أي $\ln(1+x) - \left[x - \frac{x^2}{2}\right] \geq 0$ وهذا يعني أن $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

(د) من السؤالين (ب) و (ج) نجد $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

بإضافة $-x$ نجد $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

وبالقسمة على x^2 نجد $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

هـ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

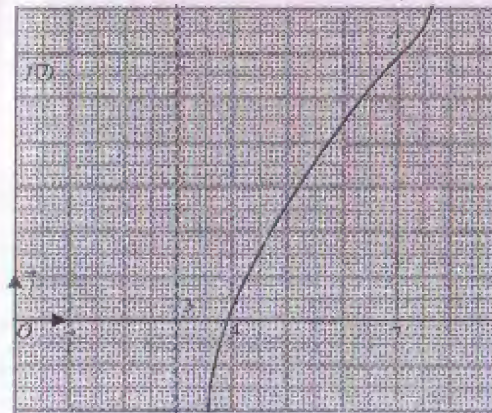
فإنه حسب نظرية الحصر تستنتج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-3) = +\infty$
 إذن المنحني (γ) ليس له مستقيم مقارب في جوار $(+\infty)$
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(x-3) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4$
 إذن (γ) له مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=3$

x	3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+
تغيرات f		$+\infty$

ب) بما أن $f'(x)$ موجبة تماما على $[3, +\infty)$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $[3, +\infty)$

(5) فاصلة نقطة التقاطع المنحني (γ) مع (xx') هي حل المعادلة $f(x) = 0$.



$f(x) = 0$ يكافئ $(x+1) = 0$ أو $\ln(x-3) = 0$ و $x > 3$
 يكافئ $(x-1) = 0$ أو $(x-3) = 1$ و $x > 3$
 يكافئ $(x-1) = 0$ أو $(x-4) = 0$ و $x > 3$
 إذن $f(x) = 0$ يكافئ $(x=4)$.
 وعليه (γ) يقطع (xx') في النقطة $(4, 0)$
 بما أن $f''(x)$ ينعلم عند 7 مغيرا إشارته في جوار 7 فإن النقطة $A(7, f(7))$ نقطة انعطاف للمنحني (γ)
 $f(7) = 8 \ln(4) = 16 \ln(2)$

تطبيق 34 دراسة دالة و حل المعادلات

(1) نعتبر g دالة معرفة على $[0, +\infty)$ بالعبارة $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$

(2) ادرس تغيرات الدالة g .

(3) احسب $g'(1)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$ على $[0, +\infty)$

(4) نعتبر f دالة معرفة على $[0, +\infty)$ بالعبارة $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$

(1) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

(2) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ وعند الصفر

(3) باستعمال الفرع (1) ادرس تغيرات الدالة f . ثم ارسم (γ) للمنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة 5 cm).
 (III) 1) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0, 1[$.
 2) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{x}$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]1, +\infty[$.
 (3) 1) بين أن $\alpha\beta = 1$.
 ب) عين حصر α بـ β بتقريب 0,001 ثم استنتج حصر α .

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} [x^4 - 1 - 4x \ln x] = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x^4} - 4 \frac{\ln x}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[1 - \frac{1}{x^4} - 4 \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

اتجاه تغير g

$$\text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ ولدينا } g'(x) = \frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \text{ يكافئ } x=1 \text{ أو } x=-1$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن للمعادلة } g'(x) = 0 \text{ حلا وحيدا } x=1$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		+	+
تغيرات g			$+\infty$

من أجل كل $x > 0$
 $x \neq 1$ لدينا $g'(x) > 0$
 وبالتالي الدالة g متزايدة
 تماما على $[0, +\infty)$
 $g(1) = 0$ (2)

إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > 0$ وإذا كان $x < 1$ فإن $g(x) < 0$

(II) 1) من أجل كل $x > 0$ لدينا:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{4} + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (-\ln x)^2$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (\ln x)^2 = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{حالة عدم التعيين.} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty - \infty \quad \text{حالة عدم التعيين}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} - (\ln x)^2 \right] = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} g(x) \quad \text{ولدينا }]0, +\infty[\quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ } x=1$$

- بما أن من أجل كل $x > 1$ يكون

$$g(x) > 0 \quad \text{فإن } f'(x) > 0$$

- وإذا كان $0 < x < 1$ فإن

$$g(x) < 0 \quad \text{ومنه } f'(x) < 0$$

إذن f متزايدة تماما على

$$]1, +\infty[\quad \text{ومتناقصة تمام على }]0, 1[$$

$$(III) \quad \text{نضع } h(x) = f(x) - x$$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]0, 1[$

$$\text{ولدينا } H(x) = f'(x) - 1$$

- بما أن $f'(x) < 0$ على المجال $]0, 1[$

$$\text{فإن } H(x) < 0 \quad \text{على }]0, 1[\quad \text{و } h(]0, 1[) = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$- \text{ بما أن } 0 \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[\quad \text{فإن للمعادلة } h(x) = 0 \quad \text{حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث } \alpha \in]0, 1[$$

$$\text{بما أن } h(\alpha) = 0 \quad \text{فإن } f(\alpha) = \alpha$$

$$(2) \quad \text{نضع } k(x) = f'(x) - \frac{1}{x}$$

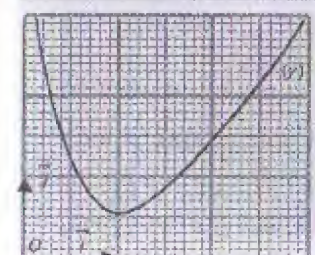
$$\text{الدالة } k \text{ قابلة للاشتقاق على }]1, +\infty[\quad \text{ولدينا } k'(x) = f''(x) + \frac{1}{x^3}$$

$$\text{بما أن } f''(x) > 0 \quad \text{على المجال }]1, +\infty[\quad \text{فإن } k'(x) > 0$$

$$\text{بما أن } k(]1, +\infty[) = \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[\quad \text{و } 0 \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$$

$$\text{فإن للمعادلة } k(x) = 0 \quad \text{حلا وحيدا } \beta \text{ من }]1, +\infty[\quad \text{أي } f(\beta) = \frac{1}{\beta}$$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$



$$(3) \quad \text{لدينا } f(\alpha) = \alpha \quad \text{و } f(\beta) = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{بما أن } \beta < 1 \quad \text{فإن } \frac{1}{\beta} > 1$$

$$\text{لدينا } f(\beta) = f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{إذن } f(\alpha) = \alpha \quad \text{و } f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$$

وبما أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا

$$\text{فإن } \frac{1}{\beta} = \alpha \quad \text{أي } \alpha\beta = 1$$

(ب) نستعمل طريقة السح لتحديد المجال $[a, b]$

الذي ينتمي إليه β في المرحلة الأولى.

ثم نستعمل طريقة ديكتومي لتحديد حصر أدق.

من الجدول المجاور نستنتج أن $\beta \in]1, 2[$

$$k\left(\frac{3}{2}\right) = -0,15080 < 0$$

$$k(1,75) = -0,027243 < 0$$

$$k(1,875) = 0,10916 > 0 \quad \text{إذن } \beta \in]1,750, 1,875[$$

$$- \text{ بما أن } \beta \in]1,750, 1,875[\quad \text{والدالة } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ متناقصة على المجال }]1,750, 1,875[$$

$$\text{فإن } \alpha \in \left] \frac{1}{1,875}, \frac{1}{1,750} \right[\quad \text{أي } \frac{1}{\beta} \in \left] \frac{1}{1,875}, \frac{1}{1,750} \right[$$

$$\text{ومنه } \alpha \in]0,533, 0,571[$$

تطبيق 35 دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \quad \text{بالعبارة } \mathbb{R} - \{0,1\}$$

(أ) متحناها البياني في معلم متعامد و منحاس

(ب) بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ فإن

$$\frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] = -\frac{1}{4}$$

(ج) استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (أ)

$$(2) \quad \text{ارسم تغيرات الدالة } f \text{ على المجالين } \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\quad \text{و }]1, +\infty[$$

(3) (أ) بين أن المستقيم $y = -\frac{x}{2}$ ذا المعادلة $y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (γ)
ثم حدد الوضع النسبي للمنحنى (γ) بالنسبة إلى (Δ) .
(ب) ارسم (γ) و (Δ) في نفس العلم.

الحل

(1) من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] &= \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \left(\frac{1-x}{2} \right) + \ln \left| \frac{-x}{1-x} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \times \frac{x}{x-1} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \ln |1| \right] = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ب) لدينا $\frac{1}{2} [f(x) + f(1-x)] = -\frac{1}{4}$... (*)

$A(a, b)$ مركز تناظر لـ (γ) إذا وفقط إذا كان $f(2a-x) = 2b - f(x)$

$$\frac{1}{2} [f(x) + f(2a-x)] = b$$

من العلاقة (*) نستنتج أن $b = -\frac{1}{4}$ و $a = \frac{1}{2}$ ومنه النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ (γ)

(2) دراسة تغيرات الدالة f على $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ و $[1, +\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ و $[1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$$

x	-1	0	1	2
$-(x+1)(x-2)$	-	+	+	-
$2x(x-1)$	+	+	-	+
$\frac{-(x+1)(x-2)}{2x(x-1)}$	-	+	-	+

إذا كان $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ أو $x \in [2, +\infty[$ فإن $f'(x) < 0$

إذا كان $x \in [1, 2]$ فإن $f'(x) > 0$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{2} \right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x-1}{x} \right| = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

جدول تغيرات f على $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup]1, +\infty[$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-		+	-
تغيرات f	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	$-1 - \ln(2)$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \\ &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

ومنه $y = -\frac{x}{2}$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

- لدراسة وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة القدار $f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right)$ على $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup]1, +\infty[$

$$f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

لدينا $f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) = \ln \left(\frac{1-x}{x} \right)$ فإن $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ إذا كان -

بما أن $x < 1-x$ فإن $\frac{1-x}{x} < 1$ ومنه $\ln \left(\frac{1-x}{x} \right) < 0$

أي المنحنى (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- إذا كان $x \in [1, +\infty[$ فإن $f(x) - \left(\frac{-x}{2} \right) = \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$

بما أن $x < x-1$ فإن $\frac{x-1}{x} < 1$

أي $\ln \left(\frac{x-1}{x} \right) < 0$

- (3) بين أنه من أجل $x > 0$ يكون $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج تغيرات f .
 (ب) بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم (f) و (γ) .

الحل ✓

- (1) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $[1, +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
 من أجل كل $x > 1$ لدينا $g'(x) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$ وبالتالي $g([1, +\infty[) =]-\infty, 1 - \ln 2]$
 بما أن $g'(0) = -\infty$ و $0 \in]-\infty, 1 - \ln 2]$
 فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in [1, +\infty[$
 - تعيين حصر α

باستعمال طريقة السج نجد أن $\alpha \in]1, 2]$ نحسب $g\left(\frac{1+2}{2}\right)$ أي $g(1,5)$
 $g(1,5) = 0,206 > 0$ ومنه $\alpha \in]1,5, 2]$

(2) تعيين إشارة $g(x)$

بما أن g متناقصة تماما على المجال $[1, +\infty[$ و $g(\alpha) = 0$ و $g(1) > 0$ فإن:
 إذا كان $\alpha \in]x, +\infty[$ يكون $g(x) < 0$
 وإذا كان $\alpha \in [1, x]$ يكون $g(x) > 0$

x	0	1	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	-	+	0	-

بما أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0, 1]$ و $g(0) = 0$ و $g(1) > 0$

فإنه من أجل كل $x \in]0, 1]$ يكون $g(x) > 0$

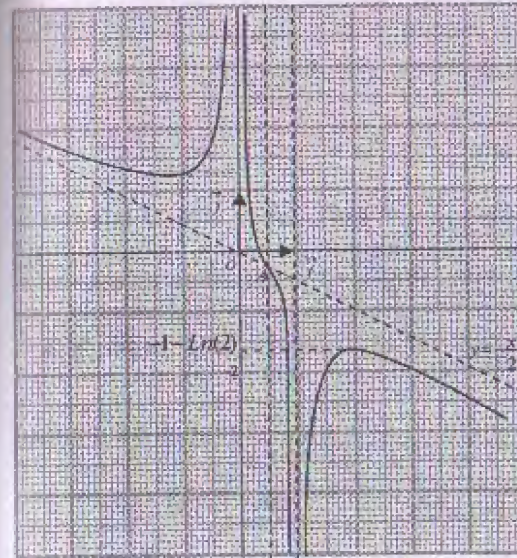
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{cases} \quad x > 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 = e \quad (1)$$

حيث $X = x^2$

(ب) بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ تساوي عدد حقيقي فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر.

- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ هي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$



ومنه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ) في المجال $]1, +\infty[$
 صورة (Δ) بالتناظر المركزي الذي مركزه A هو المستقيم (Δ) .
 صورة المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو نفسه.

صورة النقطة $(2, -1 - \ln 2)$

هي النقطة $(-1, \frac{1}{2} + \ln 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

دراسة دالة و رسم التمثيل البياني لها

تطبيق 36

- (1) دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$
 (1) بين أنه على المجال $[1, +\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α
 ثم حدد حصرا له بتقريب $0,1$.
 (2) عين إشارة $g(x)$ على المجال $[0, +\infty[$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \end{cases} \quad x > 0 \quad (II)$$

(1) ما هي نهاية $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ إذا x يؤول إلى 0؟

(ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ ثم أوجد معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$ للمنحنى البياني (γ) التمثيل لـ f

(2) بين أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
 ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$.

و بالحساب نجد $y = x$

(2) من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(3) (أ) من أجل كل $x > 0$ لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$
 $f'(x) = 0$ يكافئ $g(x) = 0$ يكافئ $x = \alpha$

x	0	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	ϕ	+	-
تغيرات f	0	$f(\alpha)$	0

إذا كان $x \in]0, \alpha[$

فإن $f'(x) > 0$

وبالتالي f متزايدة تماماً على $[0, \alpha]$

وإذا كان $x \in]\alpha, +\infty[$

فإن $f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماماً على $]\alpha, +\infty[$

(ب) بما أن $g(\alpha) = 0$ فإن $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} - \ln(\alpha^2+1) = 0$

أي $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \ln(\alpha^2+1)$

$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

نضع $L(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

الدالة L قابلة للاشتقاق على $]1,5, 2[$

ولدينا $L'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

ومن أجل كل x من $]1,5, 2[$

لدينا $L'(x) < 0$

أي L متناقصة تماماً على $]1,5, 2[$

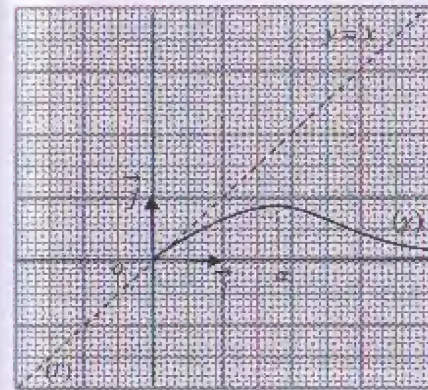
وعليه $L([1,5, 2]) =]0,75, 0,923[$

وبما أن $L(\alpha) = f(\alpha)$

فإن $f(\alpha) \in]0,75, 0,923[$

للتقريب ذو العادلة $y = 0$

مقارب لـ (y) في حوال $(+\infty)$



تطبيق 37

عائلة المنحنيات f_n

n عدد طبيعي غير معدوم و f_n دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بالعبارة $f_n(x) = x^n \ln(x+1)$ و المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول 2 cm)

(1) لتكن h_n دالة معرفة على $]-1, +\infty[$ بـ $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$
 (أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h_n

(ب) احسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على $]-1, +\infty[$

(2) (أ) تحقق أنه من أجل كل $x \in]-1, +\infty[$ لدينا

$$f_n'(x) = x^{n-1} \times h_n'(x) \text{ مع } n \geq 2$$

(ب) نضع $n=1$ تحقق أن $f_1'(x) = h_1(x)$ ثم بين أن $f_1(x)$ و $h_1(x)$

لهما نفس الإشارة على المجال $]-1, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f_2

(3) (أ) بين أن جميع المنحنيات (γ_n) تمر من نقطة ثانية يطلب تعيينها

(ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2) في نفس المعلم

✓ الحل

(1) (أ) دراسة اتجاه تغير h_n

الدالة h_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

ولدينا $h_n'(x) = \frac{nx + (n+1)}{(x+1)^2}$

فالمعادلة $h_n'(x) = 0$ لها حل وحيد هو $x = -\left(\frac{n+1}{n}\right)$

بما أن $-\left(\frac{n+1}{n}\right) < -1$ فإن المعادلة $h_n'(x) = 0$ ليس لها حلولاً في $]-1, +\infty[$

و إشارة $h_n'(x)$ هي نفس إشارة $nx + (n+1)$

من الجدول المجاور نستنتج أنه من أجل كل $x \in]-1, +\infty[$ يكون $h_n'(x) > 0$ إذن الدالة h_n متزايدة تماماً على $]-1, +\infty[$

x	$-\left(\frac{n+1}{n}\right)$	-1	$+\infty$
$nx + (n+1)$	-	ϕ	+

(ب) بما أن $h_n(0) = 0$ فإنه إذا كان $x \in]-1, 0[$ يكون $h_n(x) < 0$

وإذا كان $x \in]0, +\infty[$ يكون $h_n(x) > 0$

(2) (1) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ ولدينا $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$

ب) من أجل $n=1$ نجد $f'_1(x) = h_1(x)$ وبالتالي إشارة $f'_1(x)$ هي نفس إشارة $h_1(x)$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$

x	-1	0	$+\infty$
إشارة $f'_1(x)$		-	+
تغيرات f_1		\searrow	\nearrow

ج) من أجل $n=2$:

$$f_2(x) = x h_2(x) \\ f'_2(0) = 0$$

إذا كان $x > 0$ فإن $f_2(x) > 0$

وإذا كان $-1 < x < 0$ فإن $f_2(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 \ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x+1) = +\infty$$

x	-1	0	$+\infty$
إشارة $f'_2(x)$		+	+
تغيرات f_2		\nearrow	\nearrow

(3) (1) $M_0(x_0, y_0)$ تنتمي إلى (y_{n_1}) و (y_{n_2}) مع $n_1 \neq n_2$ هذا معناه أن :

$$y_0 = x_0^{n_1} \ln(x_0+1)$$

$$y_0 = x_0^{n_2} \ln(x_0+1) \text{ و}$$

ومنه ينتج $x_0^{n_1} \ln(x_0+1) = x_0^{n_2} \ln(x_0+1)$

وبالتبسيط نجد $(\ln(x_0+1))(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) = 0$

أي $(\ln(x_0+1)) = 0$ لأن $(x_0^{n_1} - x_0^{n_2}) \neq 0$

$\ln(x_0+1) = 0$ يكافئ $x_0 = 0$ وعليه $y_0 = 0$

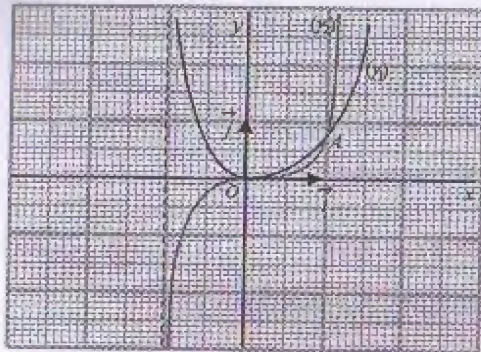
إذن النقطة $O(0,0)$ تنتمي إلى جميع المنحنيات (y_n) .

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (y_1) و (y_2)

لدراسة الوضع النسبي لـ (y_1) و (y_2) ندرس إشارة القدر $f_2(x) - f_1(x)$ على $]-1, +\infty[$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)\ln(1+x)$$

x	-1	0	1	$+\infty$
$x(x-1)$		+	-	+
$\ln(1+x)$		-	+	+
$f_2(x) - f_1(x)$		-	-	+



- المنحنى (γ_2) يقطع المنحنى (γ_1)

في النقطة $O(0,0)$

و يقطعه أيضا في النقطة

$$A(1, \ln(2))$$

- إذا كان $x > 1$

فإن (γ_2) يقع فوق (γ_1)

- إذا كان $x \in]-1, 1[$

فإن (γ_2) يقع تحت (γ_1)

تطبيق 38

لنجد الدوال اللوغاريتمية والمتتاليات

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = e \sqrt{U_n}$$

(V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n = \ln(U_n) - 2$

(1) بين أن المتتالية (V_n) هندسية معينا حدها الأول V_0 وأساسها r .

(2) استنتج عبارة V_n و $\ln(U_n)$ بدلالة n .

(3) (أ) ما هي نهاية (V_n) ؟

ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو e^2 .

✓ الحل

(1) (V_n) هندسية معناه أنه يوجد r من \mathbb{R}^*

بحيث من أجل كل n لدينا $V_{n+1} = V_n \times r$

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2 = \ln(e \sqrt{U_n}) - 2 = \ln(e) + \ln(\sqrt{U_n}) - 2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln(U_n) - 2 = \frac{1}{2} (\ln(U_n) - 2) = \frac{1}{2} V_n$$

إذن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

$$\text{وحدها الأول } V_0 = \ln(U_0) - 2 = 1$$

$$V_n = V_0 \times r^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2)$$

$$\ln(U_n) = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$$

$$(3) \quad 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ لأن } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{ب) بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n) = 2 \text{ و } \ln(e^2) = 2$$

$$\text{و النالة } \ln x \mapsto x \text{ متزايدة تماما فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e^2$$

تطبيق 39

الدوال اللوغاريتمية والمتتاليات

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة من أجل كل } n \geq 1 \text{ بـ } U_1 = 2$$

$$\text{و } \ln(U_{n+1}) = \frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right]$$

(1) بين أن هذه المتتالية معرفة وأن جميع حدودها أصغر من أو يساوي 2.

(2) من أجل كل $n \geq 1$ نعرف للمتتاليتين (V_n) و (W_n) بـ $V_n = n \times U_n$

$$\text{و } W_n = \ln(V_n)$$

أوجد العلاقة بين V_{n+1} و V_n ثم استنتج أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها r .

(3) بين أن المتتالية (W_n) متقاربة ثم استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو نهاية يطلب إيجادها.

(4) احسب المجموع $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ ثم استنتج عبارة الجداء

$$Q_n = U_1 U_2 \dots \times U_n \text{ حيث } Q_n = V_1 V_2 \dots \times V_n$$

ب) ادرس نهايات المتتاليات (S_n) ، (Q_n) ، (π_n) .

الحل

$$(1) \text{ الدالة } x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2} \text{ متناقصة تماما على المجال } [1, +\infty[$$

$$\text{و بالتالي من أجل كل } x \text{ من } [1, +\infty[\text{ لدينا } 0 < \frac{x}{(x+1)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه ينتج } 0 < \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2}$$

نريد إثبات أن من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq 2$ ، نرهن على هذه الخاصية بالزاجع

نسمي الخاصية $(0 < U_n \leq 2)$

P_1 صحيحة لأن $0 < U_1 \leq 2$

نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < U_n \leq 2$ ونرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$

$$\text{بما أن } 0 < U_n \leq 2 \text{ و } 0 < \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{2} \text{ فإن } 0 < U_n \times \frac{n}{(n+1)^2} < 1$$

$$\text{ومنه نستنتج } 0 < \ln\left(U_n \times \frac{n}{(n+1)^2}\right) \text{ أي } \ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) > 0$$

$$\text{وبالقسم على 2 نجد } 0 < \frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right] \text{ أي } \ln(U_{n+1}) > 0$$

$$\text{بما أن } 0 < \ln(U_{n+1}) \text{ فإن } U_{n+1} > 1 \text{ وبما أن } 2 \geq 1$$

$$\text{فإن } 0 < U_{n+1} \leq 2 \text{ إذن } P_{n+1} \text{ صحيحة}$$

وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل $n \geq 1$

$$(2) \quad V_{n+1} = (n+1)U_{n+1} \text{ ومنه } \ln(V_{n+1}) = \ln((n+1)U_{n+1})$$

$$\ln(V_{n+1}) = \ln(n+1) + \ln(U_{n+1}) = \ln(n+1) + \frac{1}{2} \left[\ln(U_n) + \ln\left(\frac{n}{(n+1)^2}\right) \right]$$

$$= \ln(n+1) + \frac{1}{2} \ln(U_n) + \frac{1}{2} \ln(n) - \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(U_n) + \frac{1}{2} \ln(n) = \frac{1}{2} \ln(n \times U_n)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(V_n) = \ln\left(\frac{1}{2} V_n\right)$$

$$\text{ومنه } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

- استنتج أن المتتالية (W_n) هندسية.

$$W_{n+1} = \ln(V_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} V_n\right) = \frac{1}{2} \ln(V_n) = \frac{1}{2} W_n$$

ومنه المتتالية (W_n) هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$.

$$(3) \text{ بما أن } r = \frac{1}{2} \text{ فإن المتتالية } (W_n) \text{ متقاربة نحو الصفر}$$

$$\text{بما أن } W_n = \ln(V_n) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$$

$$\text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\text{لأن } U_n = V_n \times \frac{1}{n}$$

$$(4) \quad S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n \text{ و } W_1 = \ln(V_1) = \ln(U_1) = \ln(2)$$

$$S_n = \ln(2) \times \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] = -2 \ln(2) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]$$

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

$$S_n = \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n)$$

$$S_n = \ln(V_1 \times \dots \times V_n) = \ln(\pi_n)$$

$$\pi_n = e^{S_n} = e^{-2 \ln(2) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}$$

$$\pi_n = (1 \times U_1)(2 \times U_2) \times \dots \times (n U_n)$$

$$\pi_n = (1 \times 2 \times \dots \times n)(U_1 \times \dots \times U_n)$$

$$Q_n = \frac{\pi_n}{n!} \text{ ومنه } \pi_n = (n!) Q_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \ln(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} = e^{2 \ln(2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi_n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = e^{2 \ln(2)} \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

تطبيق 40

مجموعة الدوال اللوغاريتمية والتتاليات

f دالة معرفة على المجال $]e+1, +\infty[$ بـ $I =]e+1, +\infty[$ $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)} + 1$

(1) (أ) عين اتجاه تغير الدالة f

(ب) عين نهاية f على أطراف المجال I

(ج) برهن أنه إذا كان $x > e+1$ فإن $f(x) > e+1$

(2) تعرف التتالية (U_n) بـ $U_0 = e^2 + 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > e+1$

(ب) برهن أن التتالية (U_n) متناقصة

(ج) استنتج أن (U_n) متقاربة نحو ℓ ثم عين ℓ

✓ الحل

$$(1) \text{ (أ) الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]e+1, +\infty[\text{ ولدينا } f'(x) = \frac{\ln(x-1)-1}{[\ln(x-1)]^2}$$

بما أن $x > e+1$ فإن $x-1 > e$

ومنه $\ln(x-1) > 1$ إذن $f'(x) > 0$ على المجال $]e+1, +\infty[$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow e+1} f(x) = e+1$

(ج) بما أن الدالة f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

فإنه إذا كان $x > e+1$ يكون $f(x) > f(e+1)$ أي $f(x) > e+1$

(2) (أ) نسمي P_n الخاصية $(U_n > e+1)$

P_0 صحيحة لأن $U_0 = e^2 + 1$ و $e^2 + 1 > e+1$

نفرض أن P_n صحيحة أي $U_n > e+1$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > e+1$

بما أن $U_n > e+1$ و f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$

فإن $f(U_n) > f(e+1)$ أي $U_{n+1} > e+1$

ومنه P_{n+1} صحيحة

وبالتالي P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) بما أن f متزايدة تماماً على $]e+1, +\infty[$ فإن (U_n) رتيبة،

ولتعيين نوع الرتبة نحسب $U_1 - U_0$

إذا كان $U_1 - U_0 > 0$ نقول أن (U_n) متزايدة

وإذا كان $U_1 - U_0 < 0$ نقول أن (U_n) متناقصة

$$U_1 - U_0 = \frac{U_0 - 1}{\ln(U_0 - 1)} + 1 - U_0 = -\frac{1}{2} e^2 < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة

(ج) بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو ℓ حيث ℓ حل لـ $x = f(x)$

$x = f(x)$ يكافئ $(x=1)$ أو $(x=e+1)$

بما أن $]e+1, +\infty[\ni 1$ فإنه مرفوض وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e+1$

تطبيق 41

الكمياء PH

في الكيمياء الرمز PH يعني كمون الهيدروجين

PH يسمح لنا بالتعبير عن الطبيعة الحمضية أو الأساسية لمحلول مائي

إذا كانت $[H_3O^+]$ تمثل تركيز شوارد الهيدروجين بالمول

$$\text{نصع } PH = -\text{Log} [H_3O^+]$$

$$PH = -\log [H_3O^+] = -\log (3,2 \times 10^{-6}) = 5,494 \quad (4)$$

بما أن $1 < PH < 7$ فإن هذا المحلول حمضي.

$$PH = -\log (4 \times 10^{-8}) = 7,40 \quad \text{ومنه} \quad [H_3O^+] = 4 \times 10^{-8} \quad (5)$$

بما أن $7 < PH < 14$ فإن هذا المحلول قاعدته ضعيفة.

تطبيق 12

حل المعادلات والمراجعات

حل في \mathbb{R} المعادلات والمراجعات التالية:

$$(1) \quad 7^{x-2} = 5^x \quad (ب) \quad 5^x \geq 4 \quad (ج) \quad \frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4}$$

$$(د) \quad 2^{x+2} - 2^{2x} - 3 = 0 \quad (هـ) \quad 4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0 \quad (و) \quad 5^{x+1} + 2 \times 5^{-x} = 7$$

✓ الحل

$$(1) \quad 7^{x-2} = 5^x \quad \text{تكافئ} \quad (x-2)\ln(7) = x\ln(5) \quad \text{يكافئ} \quad x = \frac{2\ln(7)}{\ln(7) - \ln(5)}$$

$$(ب) \quad 5^x \geq 4 \quad \text{يكافئ} \quad x\ln(5) \geq \ln(4) \quad \text{يكافئ} \quad x \geq \frac{\ln(4)}{\ln(5)}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المراجعة } 5^x \geq 4 \text{ هي } S = \left[\frac{\ln(4)}{\ln(5)}, +\infty \right[$$

$$(ج) \quad \frac{3^x}{3^x+1} < \frac{1}{4} \quad \text{يكافئ} \quad 4 \times 3^x < 3^x+1 \quad \text{يكافئ} \quad x \leq -1 + \frac{1}{\ln(3)}$$

$$\text{ومنه مجموعة حلول المراجعة (ب) هي } S = \left] -\infty, -1 + \frac{1}{\ln(3)} \right]$$

$$(د) \quad \text{المعادلة (د) تكتب } (2^{2x})^2 \times 2^{-2} - 2^{2x} - 3 = 0 \quad \text{وبوضع } X = 2^{2x}$$

$$\text{تصبح } 2^{-2}X^2 - X - 3 = 0 \quad \text{وحل هذه الأخيرة هما } -4 \text{ و } 12$$

$$X_2 \text{ مرفوض لأنه سالب و } X_1 \text{ مقبول}$$

$$X = X_1 \quad \text{تكافئ} \quad x = \frac{\ln(12)}{\ln(4)} \quad \text{ومنه} \quad S = \left\{ \frac{\ln(12)}{\ln(4)} \right\}$$

$$(هـ) \quad \text{المراجعة (هـ) تكتب على شكل } (2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3 \leq 0$$

$$\text{وبوضع } X = 2^x \text{ تصبح } X^2 + 2X - 3 \leq 0$$

$$\text{للمعادلة } X^2 + 2X - 3 = 0 \quad \text{حلان هما } 1 \text{ و } -3$$

(1) من أجل محلول حمضي لدينا $1 < PH < 7$ استنتج تركيز $[H_3O^+]$

(2) من أجل محلول قاعدي (أساسي) لدينا $7 < PH < 14$

استنتج تركيز $[H_3O^+]$ لهذا المحلول القاعدي.

(3) ماء معدني غازي يحمل إشارة $PH = 6,5$ ما هو تركيزه بشوارد $[H_3O^+]$ ؟

(4) متوسط تركيز $[H_3O^+]$ في بول لأكلات اللحوم هو $3,2 \times 10^{-6}$

مول على اللتر. احسب PH هذا المحلول. ماذا تستنتج ؟

(5) إذا علمت أن تركيز H_3O^+ في الدم هو 4×10^{-8} مول على اللتر. بين أن الدم له طبيعة قاعدية ضعيفة.

✓ الحل

$$(1) \quad 1 < PH < 7 \quad \text{هذا يعني} \quad 1 < -\log [H_3O^+] < 7 \quad \text{أي} \quad 1 < \log \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right] < 7$$

$$\text{بما أن الدالة } x \mapsto 10^x \text{ متزايدة تمامًا فإنه ينتج } 10^1 < \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right] < 10^7$$

$$\text{بالقلب نجد } 10^{-7} < [H_3O^+] < 10^{-1}$$

$$(2) \quad 7 < PH < 14 \quad \text{هذا يعني} \quad 7 < -\log [H_3O^+] < 14$$

$$7 < -\log [H_3O^+] < 14 \quad \text{منه نستنتج } 10^7 < \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right] < 10^{14}$$

$$\text{بالقلب نجد } 10^{-14} < [H_3O^+] < 10^{-7}$$

$$(3) \quad PH = -\log [H_3O^+] \quad \text{منه} \quad PH = \log \left[\frac{1}{[H_3O^+]} \right] = 10^{PH}$$

$$\text{بالقلب نجد } [H_3O^+] = 10^{-PH} \quad \text{أي} \quad [H_3O^+] = 10^{-6,5}$$

وبالتالي $X^2 + 2X - 3 = (X+3)(X-1)$ إذن $(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3 = (2^x+3)(2^x-1)$ من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $2^x+3 > 0$ ومنه إشارة $(2^x)^2 + 2 \times 2^x - 3$ هي نفس إشارة (2^x-1) .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $2^x - 1$	-	0	+
إشارة $(4^x + 2^{x+1} - 3)$	-	0	+

من الجدول الجاور نستنتج أنه إذا كان $x \leq 0$ فإن $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ ومنه مجموعة حلول التراجحة $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$ هي $S =]-\infty, 0]$.

(و) بضرب طرفي المعادلة (و) في العدد 5^x نجد $5^{2x+1} + 2 = 7 \times 5^x$ بالتبسيط نجد $5^{2x+1} - 7 \times 5^x + 2 = 0$ وبوضع $X = 5^x$ تصبح $5X^2 - 7X + 2 = 0$.

حالا المعادلة $5X^2 - 7X + 2 = 0$ هما 1 و $\frac{2}{5}$.
 $X = 1$ يكافئ $5^x = 1$ تكافئ $x = 0$

$X = \frac{2}{5}$ يكافئ $5^x = \frac{2}{5}$ يكافئ $x = \frac{\ln(\frac{2}{5})}{\ln(5)}$

إذن مجموعة حلا المعادلة (و) هي $S = \left\{ \frac{\ln(\frac{2}{5})}{\ln(5)}, 0 \right\}$

تطبيق 43 حل جملة معادلتين

حل في \mathbb{R}^2 الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} 5^x \times 5^y = 25 \\ 5^x + 5^y = \frac{626}{5} \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} x+y=3 \\ 2^x \times 3^y = 18 \end{cases} \quad \text{ا)}$$

الحل

$$\begin{cases} x+y=3 \dots (1) \\ 2^x \times 3^y = 18 \dots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد $y = 3 - x$ نعوض y في (2) نجد $2^x \times 3^{3-x} = 18$ ومنه نستنتج $\ln(2^x) + \ln(3^{3-x}) = \ln(18)$ أي $x \ln(2) + (3-x) \ln(3) = \ln(18)$ بالتبسيط نجد $x \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه نجد $x = 1$.

نعوض قيمة x في عبارة y نجد $y = 2$
إذن مجموعة حلول الجملة (ا) هي $S = \{(1, 2)\}$.

(ب) بوضع $5^x = X$ و $5^y = Y$

$$(i) \dots \begin{cases} XY = 25 \dots (1) \\ X+Y = \frac{626}{5} \dots (2) \end{cases}$$

من المساواة $XY = 25$ نجد $Y = \frac{25}{X}$

وبتعويض عبارة Y في المعادلة (2) نجد $X + \frac{25}{X} = \frac{626}{5}$

بالتبسيط نجد $5X^2 - 626X - 125 = 0$

$$\text{وبعد حل هذه الأخيرة نجد } X_1 = \frac{625 + \sqrt{395436}}{10}, X_2 = \frac{625 - \sqrt{395436}}{10}$$

X_2 سالب فهو مرفوض و X_1 موجب فهو مقبول.

$X = X_1$ يكافئ $5^x = X_1$ يكافئ $x = \frac{\ln(X_1)}{\ln(5)}$

بتعويض قيمة X في عبارة Y نجد $Y = \frac{25}{X_1}$

$Y = \frac{25}{X_1}$ يكافئ $5^y = \frac{25}{X_1}$ يكافئ $y = \frac{\ln(\frac{25}{X_1})}{\ln(5)}$

إذن مجموعة حلول التراجحة (ب) هي $S = \left\{ \left(\frac{\ln(X_1)}{\ln(5)}, \frac{\ln(\frac{25}{X_1})}{\ln(5)} \right) \right\}$

رسم التمثيل البياني لدالة

تطبيق 44

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (2-x)2^x$

ادرس تغيرات f . ثم ارسم (C_f) متجناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل

$$f(x) = (2-x)e^{x \ln(2)} \quad \text{منه } 2^x = e^{x \ln(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2e^{x \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} (x \ln 2) e^{x \ln 2} \right] = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ مع $X = x \ln 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \ln 2) e^{x \ln 2} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = (-x \ln 2 - 1 + 2 \ln 2) e^{x \ln 2}$

$f''(x) = 0$ يكافئ $x = \frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2} = \alpha$

- إذا كان $x > \frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2}$ فإن $f'(x) < 0$

- إذا كان $x < \frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2}$ فإن $f'(x) > 0$

$$\frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2} \approx 0,56$$

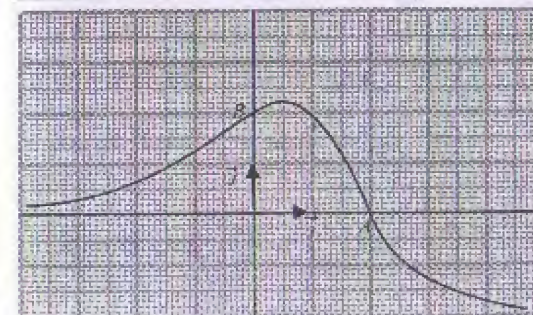
$$f\left(\frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2}\right) \approx 2,1$$

المنحنى (C_f) يقطع (x, x') في النقطة $A(2, 0)$

المنحنى (C_f) يقطع (y, y') في النقطة $B(0, 2)$

يمكن التأكد من أن المنحنى (C_f) له نقطة انعطاف فاصلتها أكبر 2

x	$-\infty$	$\frac{-1 + 2 \ln 2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$ إشارة	-	0	+
تغيرات f		$f(\alpha)$	
	0		$-\infty$



تطبيق 46

إيجاد عدد حلول المعادلة $x^3 = (1,5)^x$

(1) بين أنه من أجل كل $x > 0$ المساواة $x^3 = (1,5)^x$ تكتب على الشكل:

$$(1) \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1,5)}{3}$$

(2) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

بين أن للمعادلة $f(x) = \frac{\ln(1,5)}{3}$ حلين موجبين فقط.

الحل

(1) من المساواة $x^3 = (1,5)^x$ ينتج $\ln(x^3) = \ln(1,5)^x$

وباستعمال خواص الدالة \ln نجد $3 \ln x = x \ln(1,5)$

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1,5)}{3}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1-x \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

الدالة f متناقصة تماما على

$[e, +\infty[$ ومتزايدة تماما على $]0, e]$

x	0	e	$+\infty$
f'		0	-
f		$\frac{1}{e}$	

ب) بما أن $f'(x) > 0$ على $]0, e]$ و $f'(x) < 0$ على $[e, +\infty[$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{\ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا α ينتمي إلى $]0, e]$.

بما أن $f'(x) < 0$ و $f'(x) > 0$ على $]0, e]$

فإن للمعادلة $f(x) = \frac{\ln(1,5)}{3}$ حلا وحيدا β ينتمي إلى $[e, +\infty[$.

تطبيق 46

حل معادلات ومراجحات

حل المعادلات والمراجحات والجميل التالية:

$$(1) \quad x^3 - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0 \quad (2) \quad x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2 > 0$$

$$\begin{cases} x^3 = y^2 \\ x = y^2 \end{cases} \quad (3)$$

الحل

(1) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ فإن المعادلة (1) تصبح $X^2 - 3X + 2 = 0$ وحلاهما هما 1، 2

$$X = 1 \text{ يكافئ } x^{\frac{1}{3}} = 1 \text{ يكافئ } x = 1^3 = 1$$

$$X = 2 \text{ يكافئ } x^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ يكافئ } x = 8$$

منه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{1, 8\}$

(2) بوضع $X = x^{\frac{1}{3}}$ التراجحة (2) نكتب على الشكل $(X-1)(X-2) > 0$

ومجموعة حلول هذه الأخيرة هي $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

وبما أن الدالة $x \mapsto x^3$ متزايدة تماما على \mathbb{R} فإن $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

وبالتالي مجموعة حلول التراجحة (2) هي $S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

(3) الجملة لها معنى إذا وفقط إذا كان $x > 0$ و $y > 0$.

الجملة نكتب على شكل $\begin{cases} e^{x \ln(y)} = e^{y \ln(x)} \\ x = y^2 \end{cases}$ وهذه الأخيرة نكتب

ومنه $e^{y^2 \ln(y)} = 1$ وبالتبسيط نجد $(y^2 - 2y) \ln(y) = 0$ و $x = y^2$

حلول المعادلة $(y^2 - 2y) \ln(y) = 0$ هي $y = 1$ أو $y = 2$.

إذا كان $y = 2$ فإن $x = 4$ وإذا كان $y = 1$ فإن $x = 1$.

ومنه مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $S = \{(4, 2), (1, 1)\}$

47 تطبيق

الدوال اللوغاريتمية والأسية

ف دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم

متعامد ومتجانس

(1) برر صحة كل من المعلومات التالية

(أ) معرفة على \mathbb{R}

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

(ج) للمنحنى (γ) يقبل المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x$ كمستقيم مقارب مائل

بجوار $(+\infty)$

(د) للمنحنى (γ) يقبل مماسا وحيدا موازيا لمحور الترتيب

(2) ارسم (d) و (γ) و المماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

الحل

(1) أ) معرفة إذا وفقط إذا كان (1) $e^{2x} - e^x + 1 > 0$

بوضع $X = e^x$ التراجحة (1) نكتب $X^2 - X + 1 > 0$

ممیز $X^2 - X + 1$ هو $\Delta = -3$

$\Delta < 0$ منه إشارة $(X^2 - X + 1)$ هي من إشارة معامل X^2 أي موجبة تماما.

بالتالي $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ لأن $D_f = \mathbb{R}$

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 0$$

إذن $y = 2x$: مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$.

$$(د) \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا } f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - e^x + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$e^x(2e^x - 1) = 0$$

$$x = -\ln(2)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة

$$(2e^{2x} - e^x)$$

بما أن $f'(x)$ يعدم عند

$$-\ln(2) \text{ مغيرا إشارة في جوار } -\ln(2)$$

فإن المنحنى (γ) له مماس يوازي محور الترتيب

عند النقطة ذات الفاصلة $-\ln(2)$

(2) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

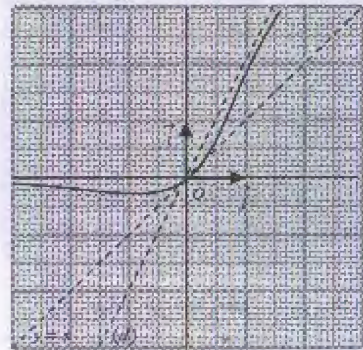
$$\text{معادلته } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{بالتعويض نجد } y = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(-\ln(2)) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,28$$

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	+
تغيرات f	0		$+\infty$



48 تطبيق

الدوال اللوغاريتمية والأسية

ف دالة معرفة بـ $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد

ومتجانس

(1) بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $x + e^{-x} \geq 1$

(ب) استنتج أن f معرفة على \mathbb{R}

(2) تحقق من صحة المعلومات التالية

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$

من أجل كل $x > 0$ لدينا $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$

ومنه $y = -x$: (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ لـ (v)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) = 0 \quad (3)$$

نستنتج أنه بجوار $(+\infty)$ للنحني (l) الممثل للدالة \ln مقارب للمنحني (v).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

(4) الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-e^{-x})$
 $f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

إذا كان $x > 0$

فإن $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما

على $[0, +\infty[$.

إذا كان $x < 0$

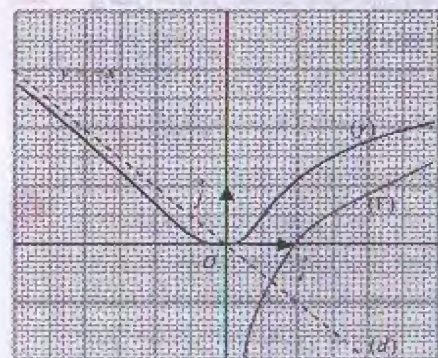
فإن $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماما

على $] -\infty, 0]$.

النحني (v) يقع تحت (d)

من أجل كل $x < 0$.



(ب) عين نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

(ج) استنتج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (v) بجوار $(-\infty)$.

(3) ماهي نهاية $[f(x) - \ln x]$ عند $(+\infty)$ ماذا تستنتج ؟

(4) ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.

(5) ارسم (d) و (v) و (l) حيث (l) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.

✓ الحل

(1) ا) نضع $g(x) = x + e^{-x} - 1$ ونبين أن $g(x) \geq 0$

و من أجل ذلك ندرس تغيرات الدالة g.

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = 1 - e^{-x}$

$g'(x) = 0$ تكافئ $e^{-x} = 1$ يكافئ $x = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$ منه g متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$ منه g متناقصة تماما على $] -\infty, 0]$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	-	0	+
تغيرات g	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيرات فلاحظ أنه من أجل

كل عدد حقيقي x يكون $g(x) \geq 0$

أي $x + e^{-x} \geq 1$.

(ب) بما أن من أجل كل x من \mathbb{R} ،

$x + e^{-x} \geq 1$ فإن $x + e^{-x} \geq 0$ وهذا

يعني أن الدالة f معرفة على \mathbb{R} .

(2) ا) من أجل كل x من \mathbb{R} ،

$$f(x) = \ln(e^{-x}(1 + xe^x)) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + xe^x) = -x + \ln(1 + xe^x)$$

$$f(x) = \ln x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) \quad \text{لدينا } x > 0$$

$$\text{منه } f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x + \ln(1 + xe^x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + xe^x) = 0$$

تمارين و مسائل



- 1- عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة لها معنى في كل حالة من الحالات التالية:
- (1) $\ln(2x+1)$ (ب) $\ln(-x^2)$ (ج) $\ln(x^2+4x-5)$
- (2) $\ln(x^2-1) - \ln(2x+1)$ (و) $\ln(2+x)(x-1)$ (ي) $\ln(x^2+1) + \ln(x^2-1)$

- 2- في كل حالة من الحالات التالية عين الأعداد الحقيقية x التي من أجلها العبارة المعطاة ذات معنى:
- (1) $\ln\left(\left|\frac{2x+3}{1-x}\right|\right)$ (ب) $\ln\left(\left|x^2-1\right|-1\right)$ (ج)
- (2) $\frac{x+1}{\ln(x)-2}$ (و) $\frac{x}{[\ln x]^2+3\ln x-2}$ (ي) $\ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ (هـ) $\sqrt{\ln x}$

- 3- f دالة معرفة على المجال $]-2, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = ax^2 + bx + \ln(x+2)$ مع a و b عدنان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.
- (1) نقطة $A(-1, 2)$ بحيث للمماس عندها يوازي مستقيم ميله 2 عين العددين الحقيقيين a و b .

- 4- (γ) المنحني البياني للدالة \ln في معلم متعامد و متجانس. M نقطة من (γ) فاصلتها m .
- (1) أوجد بدلالة m معادلة المماس T للمنحني (γ) عند النقطة M .
- (2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $m > 0$ ، للمماس T يقطع محور الترتيب في نقطة K إحداثيها $(0, \ln(m)-1)$.

- (ب) استنتج أنه إذا كانت H السقط العمودي لـ M على محور الترتيب فإن $\vec{KH} = \vec{j}$
- (ج) أعط عندئذ طريقة بسيطة لإنشاء المماس للمنحني (γ) عند النقطة M .

- 5- عين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة:
- (1) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ (ب) $f(x) = x + \ln(x+1)$ (ج) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+1}\right)$
- (2) $f(x) = \ln(x^2+3x)$ (و) $f(x) = \ln(|x-1|)$ (ن) $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-2}\right|\right)$

- 6- حل المعادلات التالية:
- (1) $\ln(-x+3) = 2\ln 2$ (ب) $2\ln x = \ln(-3x+4)$
- (2) $\ln(x^2-4x) = \ln(x+4)$ (د) $\ln(x^2-1) = 0$ (هـ) $\ln(x^2-1) = -1$
- (3) $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2$ (ن) $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(21)$

- 7- حل المتراجحات التالية:
- (1) $\ln(x) - 3 \geq 0$ (ب) $\ln(x) > \ln(2-x)$ (ج) $\ln(2x-6) > 2$
- (2) $\ln(x+3) + 2 < 0$ (هـ) $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) > 1$ (و) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) < 0$
- (3) $\ln(x-2) \leq \ln(3x-1)$ (ي) $\ln(5x) \leq \ln(x^2-x)$

- 8- في كل حالة من الحالات التالية عين المجموعة التي تكون فيها الدالة f معرفة:
- (1) $f(x) = \sqrt{\ln(x)-2}$ (ب) $f(x) = \sqrt{\ln(2x)-5}$
- (2) $f(x) = \frac{1}{2\ln(x-1)+3}$ (د) $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2-1)-3}$
- (3) $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{2\ln x-6}$ (و) $f(x) = \ln(3-\ln x)$
- (4) $f(x) = \ln(\ln(x))$ (ن)

- 9- (1) حل الجملة $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 4x+7y=29 \end{cases}$ ثم استنتج حل الجملة.
- (2) $\begin{cases} 3\ln(x) + 4\ln(y) = 21 \\ 4\ln(x) + 7\ln(y) = 29 \end{cases}$

- 10- حل الجملتين التاليتين:
- (1) $\begin{cases} x+y=12 \\ \ln(x)+\ln(y)=3\ln(3) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-y=8 \\ \ln(x)-\ln(y)=2\ln(3) \end{cases}$

- 11- ليكن $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ كثير حدود معرف بـ
- (1) بين أن $P(1) = 0$ ثم حلل $P(x)$ إلى جداء عوامل ثم حل المعادلة $P(x) = 0$
- (2) حل المعادلة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$
- (3) حل المتراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \geq 0$

12 - (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(1) احسب نهاية (U_n)

(2) نضع $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

13 - في كل حالة من الحالات التالية ادرس نهاية f عند المكان المعطى :

(أ) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند 1 ، (ب) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ عند 0

(ج) $f(x) = x + 1 - \ln(x)$ عند $(+\infty)$ ، (د) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \ln x$ عند $+\infty$ و 0

(هـ) $f(x) = x + x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ عند $(+\infty)$ ، (و) $f(x) = \frac{x \ln x}{x+2}$ عند 0

(ي) $f(x) = 1 + x^2 - x^2 \ln x$ عند $+\infty$ ، (ن) $f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x-e}$ عند e

14 - ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ، $I =]1, +\infty[$

(ب) $f(x) = x(2 - \ln x)$ ، $I =]0, +\infty[$

(ج) $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$ ، $I =]-\infty, -3[$

(د) $f(x) = \frac{\ln(x)-3}{x}$ ، $I =]e^3, +\infty[$

(هـ) $f(x) = \frac{x+2}{\ln x}$ ، $I =]1, +\infty[$

(و) $f(x) = x + 2 + \ln x - \ln(x^2 + 1)$ ، $I =]0, +\infty[$

(ن) $f(x) = x^2 + x - x \ln x$ ، $I =]0, +\infty[$

(ي) $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + 1$ ، $I =]0, +\infty[$

(ع) $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$ ، $I = \mathbb{R}$

15 - حل المعادلات التالية :

(أ) $\ln|x+3| + \ln|x-1| = 0$

(ب) $\ln|x+3| + \ln|x-1| = \ln 8$

(ج) $\ln|2x+7| + \ln|x+1| = 2 \ln|x+2|$

(د) $\ln(x-2) - \ln(x) = \ln(x)$

16 - حل المتراجحات و الجمل التالية :

$$(1) \quad 2(\ln|x|)^2 + 3\ln(x^2) - 5 < 0 \quad (2) \quad 3(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 \geq 0$$

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \ln(xy) = \frac{1}{2} \ln(3) \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} \ln(x) \ln(y) = 6 \\ \ln(xy) = 5 \end{cases}$$

17 - الدوال التالية معرفة على $I =]0, +\infty[$ ادرس تغيرات كل منها ثم ارسم منحناها البياني

$$(أ) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (ب) \quad f(x) = (\ln x)^2 + 1 \quad (ج) \quad f(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$$

$$(د) \quad f(x) = x + 1 - \ln x \quad (هـ) \quad f(x) = x^2 - x + 1 + 3 \ln x$$

18 - لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

ادرس تغيرات f ثم ارسم منحناها البياني.

19 - f و g دالتان معرفتان على المجال $I =]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \ln(x+2)$

و $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ، (C_f) و (C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ يكون $g(x) \leq f(x)$

(2) برهن أن (C_f) و (C_g) لهما مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة $x = -1$

ثم ارسم (C_f) و (C_g) .

20 - f دالة معرفة على $I =]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x}{x+3}\right)$

(1) برهن أن الدالة f متزايدة تماماً على I

(2) برهن أن السقيم (d) ذا المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في حوار $(+\infty)$

(ب) عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d) .

21 - نعتبر الدالة h المعرفة بالعبارة $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$

(1) ادرس تغيرات الدالة h ثم بين أن $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ واستنتج إشارة $h(x)$

(2) لتكن f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

(أ) احسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ على $]0, +\infty[$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

- (ج) احسب نهاية f عند $(+\infty)$ و عند الصفر ثم شكل جدول تغيرات f .
(3) (أ) برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) .
(ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (C_f) و (d) .

22

- f دالة معرفة على $]2, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x + 2 + \ln(x^2 - 4)$
(1) برهن أن f متزايدة تماما على I
(2) (أ) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α في المجال I
(ب) عين حصر α بتقريب 0,1.

23

- f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ و $I =]0, +\infty[$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس
(1) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) .
(2) لتكن M_1, M_2, M_3, M_4 نقط من (γ) .
 M_1 نقطة تقاطع (γ) مع (x, x') .
 M_2 نقطة من (γ) بحيث المماس عندها يمر من المبدأ.
 M_3 هي النقطة التي عندها المماس يوازي (x, x') .
 M_4 هي النقطة التي عندها الشئ الثاني لـ f ينعدم.
(أ) احسب قواصل النقط M_1, M_2, M_3, M_4 .
(ب) بين أن هذه القواصل تمثل متتالية هندسية.

24

- f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ و (γ) تمثيلها البياني
(1) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.
(2) (أ) نقطة من (γ) ذات الفاصلة 1، اوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند A .
(ب) ارسم (T) ثم (γ) .
(3) M نقطة من (γ) فاصلتها u بين أن المماس (T_u) لـ (γ) عند النقطة M يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=x$ إذا وفقط إذا كان $u^3 - 1 + 2 \ln(u) = 0$... (T)
(4) بعد حل المعادلة (T) بين أن النقطة A هي النقطة الوحيدة من (γ) المماس فيها يكون موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

25

- f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln(x) - \frac{3}{2} \right)$ و $f(0) = 0$
(1) (أ) ما هي نهاية النسبة $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ $x \rightarrow 0$ يؤول
(ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

- (ج) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها.
(2) (γ) للنحن البياني للمثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس وحدة الطول 2cm.
(أ) اوجد معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
(ب) نريد في هذا السؤال دراسة الوضعية النسبية لـ (γ) و (T) .
لتكن h دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $h(x) = f(x) + x - \frac{1}{4}$.
ادرس إشارة $h'(x)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ ثم $h(x)$ على $]0, +\infty[$.
(3) ارسم (T) و المماسات عند نقط تقاطع (γ) مع محور القواصل و كذا (γ) .

26

- f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln x}{x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد.
(1) g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $g(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x$.
ادرس تغيرات g على I ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α و اوجد العدد الطبيعي p بحيث $10^{-2} \geq p \geq 10^{-2} (p+1)$.
(2) عين نهاية f عند اطراف I .

- (أ) بين أنه من أجل كل x من I يكون $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ادرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها.
(ب) h دالة معرفة على I بالعبارة $h(x) = x^2 + x$ و (p) منحناها البياني.
ما هي نهاية $f(x) - h(x)$ عند $(+\infty)$ ؟ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (γ) و (p) .
ارسم (p) و (γ) .

27

- (I - g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
(2) احسب $g(1)$ و $g(2)$ ثم استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0, +\infty[$ ثم اعط حصر α بتقريب 0,01.
(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$.

- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ وليكن (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.
(1) ادرس نهاية f عند الصفر و $(+\infty)$.

- (2) بين أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ يكون $g(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$.
ثم استنتج إشارة $f'(x)$. انشئ جدول تغيرات f .

4) باستعمال السؤال (2) من (1) بين أن $\ln(\alpha) = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ و $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم اعط حصرًا لـ $f(\alpha)$ ثم ارسم (γ)

28 - k عدد حقيقي، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0, 1[$ بـ $f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx$ و (γ_k) منحناها البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

(I) نضع $k = 0$.
(1) عين اتجاه تغير الدالة f_0 .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

(ب) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x)$
(ج) بوضع $f_0(0) = 0$ هل الدالة f_0 المعرفة بهذا الشكل قابلة للاشتقاق عند الصفر؟
(د) عين نهاية النسبة $\frac{f_0(x)}{x}$ لا x يؤول إلى الصفر ثم استنتج معادلة المماس عند النقطة $O(0, 0)$ للمنحني (γ_0) ثم ارسم (γ_0) .

(II) (1) احسب $f_k'(x)$ من أجل $x \in]0, 1[$.
(ب) A_k نقطة من (γ_k) فاصلتها 1 بين أن المماس (T_k) لـ (γ_k) عند A_k هو (OA_k)
(2) ادرس نهاية f_k عند الصفر و هذا باخذ $f_k(0) = 0$.
(ب) اوجد معادلة المماس لـ (γ_k) عند النقطة O .

29 - (I) f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

(1) لتكن g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \ln(x) + x + 1$. ادرس تغيرات g ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ لها حلا وحيدا β بحيث $0, 28 \geq \beta \geq 0, 27$.

(2) (أ) من أجل كل $x > 0$ اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ مستنتجا تغيرات f .
(ب) عين نهاية الدالة f عند أطراف $]0, +\infty[$.

(II) نعتبر المعادلة (I) $f(x) = n$ و n عدد طبيعي غير معلوم.
(1) بين أن المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا α_n .

(2) (أ) بين أن $f(e^n) \leq n$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geq e^n$.

(ب) بين أن العلاقة $f(\alpha_n) = n$ تكتب على الشكل $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (2)

ثم استنتج باستعمال السؤال (I) نهاية $\frac{\alpha_n}{e^n}$ لا n يؤول إلى $(+\infty)$

(3) نكتب $(1 + \varepsilon_n) \alpha_n = e^n$ مع $\varepsilon_n \geq 0$.

(أ) باستعمال المساواة (2) اكتب $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$ بدلالة n .

(ب) بين أنه من أجل $t \geq 0$ يكون $0 \leq (1+t) \ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

(ج) استنتج من (أ) و (ب) أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون

$$\varepsilon_n \leq n e^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{(\varepsilon_n)^2}{2} \quad (3)$$

(د) من (2) و (3) عين نهاية $\alpha_n - n$ لا n يؤول إلى $(+\infty)$.

30 - (U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 0$ و من أجل $n \geq 0$ يكون $U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n}$

(1) احسب U_1, U_2, U_3 و غير عن هذه الحدود بواسطة كسر غير قابل للاختزال.

(2) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية بالنسبة إلى الحدود الأربعة الأولى لـ (V_n)

المعرفة بـ $V_n = \frac{n}{n+1}$

(3) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n = V_n$

(4) (W_n) متتالية معرفة بـ $W_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(أ) بين أن $W_1 + W_2 + W_3 = -\ln(4)$

(ب) S_n المجموع العرف بـ $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$

اكتب S_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

31 - نريد دراسة تقارب المتتالية $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$

(1) ادرس تغيرات الدالتين f و g العرفتين على $]1, +\infty[$ بـ

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

ثم استنتج أن $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

(2) نضع $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(أ) تحقق أنه من أجل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq U_n$

(ب) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

(3) (أ) لتكن الدالة K المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $K(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

فسر هندسيا العدد S_n حيث $S_n = U_{n-1} - \ln n$

(ب) من السؤال (أ) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 \leq K(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(ج) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 2$ يكون $S_n = K(1) + K(2) + \dots + K(n-1)$

ثم استنتج أن الثنائية (S_n) متزايدة ومن أجل كل $n \geq 2$ يكون $1 - \frac{1}{n} < S_n < K(1)$.
(د) استنتج من (ج) أن (S_n) متقاربة نحو l يطلب تعيينه.

32 - بعد قياس طول أطفال أعمارهم تراوح ما بين 3 أشهر و 6 سنوات نمذجنا العلاقة

بين السن x بالسنوات و الطول $K(x)$ بالـ (cm) بالدالة K التالية ،

$$K(x) = 71, 23 + 6, 13x + 8, 7 \log x$$

(أ) ادرس تغيرات الدالة K على المجال $[0, 25, 6]$.

(ب) ما هي الزيادة في الطول ما بين سنة و سنتين ؟

(ج) ارسم المنحنى البياني للدالة K في المجال $[0, 25, 6]$.

33 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = (|x|)^x, x \neq 0$ و $f(0) = 1$

(1) بين أن هذه الدالة مستمرة على IR و قابلة للاشتقاق على $IR - \{0\}$.

(2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس.

34 - نعتبر الدالة f المعرفة على IR_+^* بـ $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) عين معادلة المماس (T) لـ (f) في النقطة ذات الفاصلة 0 ثم ارسم (f) و (T) .

35 - n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدوال المعرفة على IR بـ $f_n(x) = x^n e^{-x}$

و (f_n) منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) ادرس تغيرات الدوال f_1, f_2, f_3 مع إعطاء العدد المشتق عند الصفر.

(2) بين أن جميع المنحنيات (f_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينها.

(3) ادرس تغيرات الدوال f_n في حالة n زوجي و في حالة n فردي.

(4) قارن بين الوضع النسبي لـ (f_n) و (f_{n+1}) على $[0, +\infty[$ و (f_n) و (f_{n+2}) على $]-\infty, 0]$ و مثل عندئذ $(f_1), (f_2), (f_3)$ في نفس العلم.

(II) من أجل كل $x > 0$ نضع $u(x) = x \ln(x) - x$ ادرس تغيرات u .

(2) g دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = e^{u(x)}, x > 0$ و $g(0) = 1$

(1) تحقق أنه من أجل كل $x > 0$ يكون $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{e^{u(x)}-1}{u(x)} \times (\ln(x)-1)$

(ب) بين أن الدالة g مستمرة عند الصفر و لكن غير قابل للاشتقاق عند 0.

(ج) ادرس تغيرات g .

(د) احسب $g(e)$ ثم حل التراجحة $g(x) \geq 1$ في المجال $]0, +\infty[$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نسمي M_n النقطة ذات إحداثيتي $(n, f_n(n))$.

(أ) تحقق أن النقطة M_n نقطة من المنحنى البياني للدالة g ثم ارسم هذا المنحنى.

(4) عين حسب قيم n عدد حلول المعادلة $f_n(x) = 1$ على IR .

36 - n عدد طبيعي و f_n دالة معرفة على $[0, 1]$ بـ $f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}} \times (1-x)^{\frac{1}{2}}$ ، (f_n) منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) بين أن (f_n) نصف دائرة نصف قطرها $r = \frac{1}{2}$ و مركزها ω يطلب تعيينه.

(2) في هذا السؤال نرض أن $n \geq 1$

(أ) من أجل كل x من $]0, 1[$ احسب $f_n'(x)$ مبينا أن $f_n'(x)$ و $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) - (n+1)x\right]$ لهما نفس الإشارة.

(ب) هل الدالة f_n قابلة للاشتقاق عند الصفر و الواحد. شكل جدول تغيرات f_n .

(3) (أ) ادرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ لـ $1 \geq x \geq 0$ و $n \geq 1$

(ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنيات (f_n) و (f_{n+1}) .

(ج) ارسم في العلم $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيات $(f_0), (f_1), (f_2)$.

6 الدرس

النهايات والمُتتاليات

1 - نهاية متتالية (تذكير)

1 - 1 نهاية حقيقية لمتتالية عددية

تعريف

نقول أن العدد الحقيقي ℓ نهاية لمتتالية (U_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ أو $\lim U_n = \ell$ وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (U_n) متقاربة.



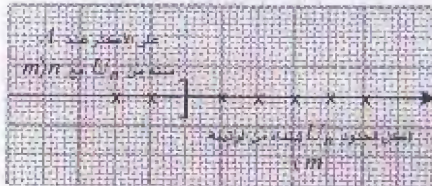
ملاحظة

- (1) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة
- (2) إذا كانت (U_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة)
- (3) كل متتالية حدودها موجبة لها نهاية موجبة أو معدومة.

مثال -

المتتاليات المعروفة بـ $U_n = \frac{1}{n}$, $V_n = \frac{1}{n^2}$, $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ هي متتاليات متقاربة نحو الصفر لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$

1 - 2 نهاية غير منتهية لمتتالية عددية



نقول أن متتالية (U_n) تغلب نهاية $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $[A, +\infty[$ يشمل كل حدود هذه المتتالية ابتداء من رتبة معينة ونكتب :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

وبعني ذلك أن حدود المتتالية (U_n) تنتهي بتجاوز أي عدد حقيقي A مهما كان كبيرا.

ملاحظة

الكتابة $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ تعني أن كل مجال مفتوح من الشكل $]A, -\infty]$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من رتبة معينة.

مثال -

المتتاليات $U_n = n^2$, $V_n = n^3$, $W_n = \sqrt{n}$, $S_n = \sqrt{n+1}$ متتالية لها النهاية $(+\infty)$ وبالتالي فهي متباعدة.

1 - 3 دراسة تقارب متتالية هندسية

دراسة تقارب متتالية هندسية كيفية ذات الحد العام q^n يقودنا إلى دراسة تقارب المتتالية الهندسية ذات الحد العام q^n .

مبرهنة

q عدد حقيقي

- إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

- إذا كان $q = 0$ أو $q = 1$ فإن المتتالية q^n ثابتة

- إذا كان $0 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

- إذا كان $q < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ غير موجود.

مثال -

(1) لتكن $U_n = 5 \left(\frac{-3}{4}\right)^n$

بما أن $-1 < \frac{-3}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

(2) لتكن $V_n = 2 \times 3^n$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ ومنه (V_n) متتالية متباعدة.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة بالعلاقة $U_n = \frac{2n+3}{n+2}$ نهايتها 2 أوجد عدد طبيعي m بحيث لما $n > m$ كل الحدود U_n تنتمي إلى المجال $I =]1.99, 2.01[$

✓ الحل

الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1.99, 2.01[$ يعني أن $1.99 < \frac{2n+3}{n+2} < 2.01$ وبطرح 2 من

حدود هذه الأخيرة نجد $-0.01 < \frac{2n+3}{n+2} - 2 < 0.01$ أي $-0.01 < \frac{-1}{n+2} < 0.01$ وبالضرب في

(-1) نجد $-10^{-2} < \frac{1}{n+2} < 10^{-2}$ وبالضرب في $(n+2)10^2$ نجد

$(n+2)10^2 < 1 < (n+2)10^2$ (I)

التيابنة $(n+2)10^2 < 1 < (n+2)10^2$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n إذن التباينة المضاعفة (I)

تكافئ $10^2 < n+2 < 10^2$ أي $n > 98$ منه تستنتج أن $m = 98$

بالتالي المجال $]1.99, 2.01[$ يشمل كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة 98.

تمرين تدريبي 2

ادرس تقارب المتتاليات $U_n = \frac{3}{4^n}$ ، $V_n = 5(\sqrt{2})^n$ ، $W_n = \frac{(-4)^n}{5}$ ، $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

✓ الحل

نلاحظ أن (U_n) ، (V_n) ، (W_n) متتاليات هندسية

- بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ إذن (U_n) متقاربة نحو الصفر.

- بما أن $\sqrt{2} > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ إذن (V_n) متتالية متباعدة.

- بما أن $-1 \leq -4 < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4)^n$ غير موجودة و منه المتتالية (W_n) متباعدة.

- (U_n) متتالية هندسية بالتالي S_n مجموع n حد الأولى المتعاقبة من متتالية (U_n) حدها

الأول $U_0 = 3$ و أساسها $\frac{1}{4}$.

إذن $S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

- بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$ ومنه المتتالية (S_n) متقاربة نحو العدد 4.

2 - نظريات حول النهايات

1 - 2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال $]a, +\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = f(n)$ و ℓ يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

مثال -

$U_n = \frac{2}{n+1}$ ، الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2}{x+1}$ نهايتها الصفر لما $x \rightarrow +\infty$ و عليه فالمتتالية (U_n) نهايتها 0.

2 - 2 المتتاليات من الشكل $U_n = f(V_n)$

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و كل حدود متتالية (V_n) تنتمي إلى I ، α ، β عدنان حقيقيان أو يمثلان $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha$ و إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(V_n) = \beta$

مثال -

$V_n = \sqrt{3 + \frac{1}{n+1}}$ متتالية معرفة بـ

بوضع $U_n = 3 + \frac{1}{n+1}$ تصبح $V_n = \sqrt{U_n}$ وبالتالي $V_n = f(U_n)$ حيث $f(x) = \sqrt{x}$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{3}$

نتيجة

إذا كانت $U_{n+1} = f(U_n)$ متتالية معرفة بـ $U_{n+1} = f(U_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ فإن $\ell = f(\ell)$ (حل $x = f(x)$)
و إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و f مستمرة عند ℓ فإن $\ell = f(\ell)$ (حل $x = f(x)$)

الإنذارات

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و إذا كانت f مستمرة عند ℓ ($\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell$) في البرهنة السابقة
تسمح لنا بالتأكد أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = f(\ell)$
و من جهة أخرى المتتالية (U_{n+1}) نهايتها ℓ لأن حدودها هي نفس حدود المتتالية (U_n) ما عدا U_0
و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$
فإن المتتاليتين (U_n) و (U_{n+1}) متساويتان وبالتالي لهما نفس النهاية أي $\ell = f(\ell)$

مثال -

متتالية (U_n) متقاربة معرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ $U_{n+1} = \sqrt{3+U_n}$ و $U_0 = 2$
أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

الحل

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{3+x}$ و منه $U_{n+1} = f(U_n)$
بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell$ و $\ell \in \mathbb{R}$
و بما أن f مستمرة عند ℓ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = f(\ell)$

إذن ℓ هو جذر للمعادلة $x = f(x)$.

$x = f(x)$ يكافئ $x^2 - x - 3 = 0$ و $x \geq 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-3) = 13$$

$\Delta > 0$ و منه المعادلة $x^2 - x - 3 = 0$ لها حلان هما $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

بما أن $x_2 < 0$ فإنه مرفوض وبالتالي $\ell = x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

3-2 نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

القواعد المتعلقة بنهايات الدوال عند $(+\infty)$ تبقى صحيحة بالنسبة إلى المتتاليات وخاصة نهاية الجمع و الجداء و حاصل قسمة متتاليتين.
أما بالنسبة إلى نهاية المتتالية باستعمال الحصر لدينا البرهنة التالية:

مبرهنة 1

(U_n) ، (V_n) ، ثلاث متتاليات عددية ، ℓ عدد حقيقي.
إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $W_n \leq U_n \leq V_n$
و إذا كانت $\lim W_n = \lim V_n = \ell$
فإن $\lim U_n = \ell$

مبرهنة 2

ℓ عدد حقيقي. إذا كان ابتداء من عدد طبيعي m لدينا $|U_n - \ell| \leq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$
فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

مبرهنة 3

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان
إذا كان من أجل كل $n \geq m$ لدينا $U_n \geq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$
فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$
إذا كان من أجل كل $n \geq m$ لدينا $U_n \leq V_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$
فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

تمرين تدريبي 1

ادرس تقارب المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \frac{2n + \cos n}{2n - \sin n}$

الحل

من أجل كل عدد طبيعي لدينا $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$(1) \dots \dots \dots -1 + 2n \leq 2n + \cos n \leq 1 + 2n$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$\dots \dots \dots -1 + 2n \leq 2n - \sin n \leq 1 + 2n$$

و بما أن حدود الثمانية الزدوجة موجبة فإنه نستنتج بالقلب

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{2n - \sin n} \leq \frac{1}{-1+2n}$$

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد ،

$$\frac{-1+2n}{1+2n} \leq \frac{2n + \cos n}{2n - \sin n} \leq \frac{1+2n}{-1+2n}$$

و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ فإنه حسب نظرية الحصر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2n}{-1+2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1+2n}{1+2n} = 1$

تمرين تدريبي 2

(V_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $V_0 = 1$ و $V_{n+1} = \sqrt{V_n + 6}$
 (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 \leq V_n \leq 3$
 (ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = \frac{V_n}{n+2}$

✓ الحل

(أ) نسمي p_n الخاصية " $0 \leq V_n \leq 3$ "
 p_0 صحيحة لأن $V_0 = 1$ و $0 \leq 1 \leq 3$
 - نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي $n \geq 0$ أي $0 \leq V_n \leq 3$
 ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $0 \leq V_{n+1} \leq 3$
 من الفرض لدينا $0 \leq V_n \leq 3$ وبإضافة 6 إلى حدود هذه المتباينة نجد $6 \leq V_n + 6 \leq 9$
 بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{3} \leq \sqrt{V_n + 6} \leq 3$ أي $0 \leq \sqrt{3} \leq V_{n+1} \leq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة.
 إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) بما أن $0 \leq V_n \leq 3$ فإن $0 \leq \frac{V_n}{n+2} \leq \frac{3}{n+2}$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n+2} = 0$ فإنه حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n+2} = 0$
 و عليه فالمتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تمرين تدريبي 3

ادرس تقارب المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة،
 $V_n = 3^{n+2} - 5^n$

✓ الحل

المتتالتان اللتان حدهما العام 5^n و 3^{n+2} هندسيان أساسهما على الترتيب 5 و 3
 وبما أن $5 > 1$ و $3 > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+2} = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ وبالتالي نستنتج،
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ حالة عدم التعيين.

V_n يكتب $V_n = 3^n (3^2 - \frac{5^n}{3^n}) = 3^n (9 - (\frac{5}{3})^n)$

بما أن $\frac{5}{3} > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{5}{3})^n = +\infty$ ومنه نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [9 - (\frac{5}{3})^n] = -\infty$

و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ فإنه حسب قاعدة نهاية جداء متتاليتين نستنتج،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times (9 - (\frac{5}{3})^n) = -\infty$$

و عليه (V_n) متباعدة.

3 - تقارب المتتاليات الرتيبة

3-1 متتالية محدودة (من الأعلى - من الأسفل)

- القول أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى يعني أنه يوجد عدد حقيقي M بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \leq M$.
 يسمى M عنصرا حادا من الأعلى للمتتالية (U_n)
 - القول أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل يعني أنه يوجد عدد حقيقي m بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq m$.
 يسمى m عنصرا حادا من الأسفل.
 - إذا كانت (U_n) محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها محدودة.

ملاحظة

(1) إذا كانت متتالية (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد M فإن كل الأعداد الحقيقية الأكبر من M هي أيضا عناصر حادة لـ (U_n)
 نعرف بنفس الكيفية العناصر الحادة من الأسفل.
 (2) نفي القضية "المتتالية (U_n) غير محدودة من الأعلى" يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد U_{n_0} بحيث $U_{n_0} > A$.

مثال -

(1) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n = \sin n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq \sin n \leq 1$
 (2) المتتالية $V_n = (-1)^n \cos n$ محدودة لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $-1 \leq V_n \leq 1$
 (3) المتتالية $W_n = -n^2$ محدودة من الأعلى لأنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $W_n \leq 0$

3-2 تقارب المتتالية الرتيبة

- المتتالية (U_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \leq U_{n+1}$

- المتتالية (U_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq U_{n+1}$.
- المتتالية (U_n) رتيبة إذا و فقط إذا كانت متزايدة أو إذا كانت متناقصة.

مثال -

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = -n^2 + n + 1$
من أجل كل عدد طبيعي $U_{n+1} = -n^2 - n + 1$
إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -2n$
من أجل كل n من \mathbb{N} يكون $-2n \leq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وبالتالي (U_n) متناقصة.

مبرهنة 1

- كل متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى نهايتها $(+\infty)$
- كل متتالية متناقصة و غير محدودة من الأسفل نهايتها $(-\infty)$

الإثبات

نثبت القسم الأول من المبرهنة (1).
لتكن (U_n) متتالية متزايدة و غير محدودة من الأعلى.
- (U_n) غير محدودة من الأعلى يعني أنه مهما يكن العدد الحقيقي A كبير بالقدر الكافي نستطيع أن نجد حد U_p من المتتالية (U_n) بحيث $U_p > A$ (1)
- (U_n) متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $p > n$ يكون $U_n \geq U_p$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل $p > n$ يكون $U_n > A$
و هذا يعني أنه ابتداء من الرتبة P كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى مجال $[A, +\infty[$ مما يعني أن نهاية (U_n) هي $+\infty$

مبرهنة 2

- كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة
- كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

الإثبات

(1) بما أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى فإنه يوجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \leq M$ ، عندهذا يوجد عدد حقيقي A و هو أصغر العناصر الحادة لـ U_n و عليه فكل مجال من الشكل $[A - \alpha, A + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$ يشمل على الأقل حد U_p من المتتالية (U_n) .

لأنه إذا كان هذا المجال لا يشمل أي حد U_p فإن كل الحدود U_n تقع على يسار $A - \alpha$ وهذا يعني أن $A - \alpha$ عنصر حاد لـ (U_n) مما يخالف الفرض كون A هو أصغر العناصر الحادة الكبرى لـ (U_n) .

و بما أن للمتتالية (U_n) متزايدة و كل الحدود (U_n) أصغر من A
فإن المجال $[A - \alpha, A + \alpha]$ يشمل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من الرتبة p و هذا صحيح من أجل كل α (أي من أجل كل مجال مركزه A).
إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي A .
(2) نبين بنفس الطريقة أن كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة.

ملاحظة

هذه المبرهنة تسمح لنا بمعرفة تقارب متتالية و لكن لا تعطينا قيمة نهايتها.

تمرين تدريبي 1

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ و $U_0 = 1$
(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < U_n \leq 2$
(2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة ثم استنتج تقاربها و احسب نهايتها.

الحل

- نسمي p_n الخاصية " $0 < U_n \leq 2$ "
- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1$ و $0 < 1 \leq 2$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $0 < U_n \leq 2$
و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $0 < U_{n+1} \leq 2$
من الفرض لدينا $0 < U_n \leq 2$ و بإضافة 2 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $2 < U_n + 2 \leq 4$
و بالمرور إلى الجذر نجد $\sqrt{2} < \sqrt{U_n + 2} \leq 2$ أي $0 < \sqrt{2} < U_{n+1} \leq 2$
و منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي.
من المتباينة $0 < U_n \leq 2$ نستنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى.

- (U_n) متزايدة هذا يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{(\sqrt{2 + U_n} - U_n)(\sqrt{2 + U_n} + U_n)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2 + U_n - U_n^2}{\sqrt{2 + U_n} + U_n} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n}$$

بما أن $0 < U_n \leq 2$ فإن $0 < U_n + 1$ و $U_n - 2 \leq 0$ و بالتالي،

$$\frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{\sqrt{2 + U_n} + U_n} \geq 0 \text{ أي } U_{n+1} - U_n \geq 0 \text{ مما يدل على أن } (U_n) \text{ متزايدة على } \mathbb{N}$$

- بما أن (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ .

ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = \sqrt{2 + x}$

$$x = f(x) \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0$$

$$\text{يكافئ } x = 2 \text{ أو } x = -1$$

وبما أن حدود التتالية موجبة فإن نهايتها موجبة وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

تمرين تدريبي 2

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } u_0 = 2 \text{ وبالعلاقة } U_{n+1} = \frac{U_n}{3+2U_n}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f: x \rightarrow \frac{x}{3+2x}$ على $[0, +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير (U_n)

(3) بين أن التتالية (U_n) متقاربة ثم استنتج نهايتها

✓ الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $U_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ فرضا

وبضرب طرفي المتباينة في 2 نجد $2U_n > 0$ وبإضافة 3 نجد $3+2U_n > 0$

إذن $U_{n+1} > 0$ منه p_{n+1} صحيحة

وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ لأن $D_f \subset [0, +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = \frac{3}{(2+3x)^2}$ إذن $f'(x) > 0$

وبالتالي f دالة متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

إذا كان $U_{n+1} = f(U_n)$ و f متزايدة فإن التتالية (U_n) رتيبة لكن $U_1 = \frac{2}{7}$

$$U_1 - U_0 \leq 0$$

إذن يمكن أن نخمن أن (U_n) متناقصة.

نبرهن بالتراجع أن (U_n) متناقصة.

نسمي p_n الخاصية " $U_{n+1} \leq U_n$ "

- من أجل $n=0$: p_0 صحيحة لأن $U_1 - U_0 \leq 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $U_{n+1} \leq U_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

النهايات و المتتاليات

من الفرض لدينا $U_{n+1} \leq U_n$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ فإن $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

أي $U_{n+2} \leq U_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n تكون p_n صحيحة.

(3) بما أن (U_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

حيث ℓ جذر للمعادلة $x = f(x)$

$$x = \frac{x}{3+2x} \text{ تكافئ } x = f(x)$$

يكافئ $x = 0$ أو $x = -1$

بما أن $x \geq 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

4 - متتاليات من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$

1 - 4 التمثيل البياني للمتتالية (U_n)

(U_n) متتالية حدها الأول U_0 و $U_{n+1} = f(U_n)$

حيث f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في

معلم متعامد و متجانس.

نعلم العدد الحقيقي U_0 على محور الفواصل

ثم نعلم النقطة A_0 من (C_f) ذات الفاصلة U_0

و الترتيب $U_1 = f(U_0)$

نعلم U_1 على محور الفواصل حيث U_1

هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $y = x$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = U_1$.

النقطة A_1 ذات الفاصلة U_1 و الترتيب $U_2 = f(U_1)$ الناتجة من تقاطع $x = U_1$ مع (C_f)

نعلم العدد U_2 على محور الفواصل كما في الحالة السابقة و هكذا دواليك.

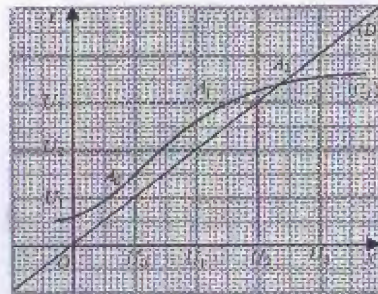
مثال -

مثل بيانها الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير و نهاية

المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$ و $U_0 = 1$

✓ الحل

نرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين (d) و (Δ) ذوي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$ و $y = x$ على الترتيب.



5 - المتتاليات المتجاورة

1-5 دراسة التقارب

مثال -

في الجدول الآتي تظهر في العمودين B و C ستة حدود لمتتاليتين (U_n) و (V_n) على التوالي. في العمود A يوجد دليل كل حد نلاحظ أن $U_0=1$ و $V_0=12$.

حجونا

$$B_2 \text{ في الخلية } = (B_1 + 2 \cdot C_1) / 3$$

$$C_2 \text{ في الخلية } = (B_1 + 3 \cdot C_1) / 4$$

$$D_2 \text{ في الخلية } = C_2 - B_2$$

	A	B	C	D
1	0	1	12	11
2	1	8.333	9.250	0.91
3	2	8.9444	9.020825	0.07638
4	3	8.995364	9.001728	0.0006365
5	4	8.9995981	9.00013775	0.00053916
6	5	8.9999578	9.000002838	0.00004503

(1) أعط عبارة U_{n+1} و V_{n+1} بدلالة U_n و V_n

(2) أعط تخميناً حول اتجاه تغير (U_n) و (V_n) .

ما هو التخمين حول نهاية $(V_n - U_n)$ ؟

(3) - لتكن (W_n) متتالية حيث $W_n = 3U_n + 8V_n$ بين أن (W_n) ثابتة.

- إذا فرضنا أن (U_n) و (V_n) تقتربان من نفس النهاية ℓ احسب القيمة الدقيقة لهذه النهاية باستعمال (W_n) .

✓ الحل

$$(1) \text{ من العطيات } U_2 = \frac{U_1 + 2V_1}{3} \text{ و } V_2 = \frac{U_1 + 3V_1}{4}$$

و عليه عبارة U_{n+1} و V_{n+1} تظهر بـ $U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$ و $V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$

(2) نلاحظ من الجدول أن المتتالية (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة. و نلاحظ أيضاً أنه كلما

كبر n فإن $V_n - U_n$ تؤول إلى الصفر و منه يمكن أن نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

(3) إثبات أن (W_n) ثابتة

$$W_{n+1} - W_n = (3U_{n+1} + 8V_{n+1}) - (3U_n + 8V_n) \\ = 3\left(\frac{U_n + 2V_n}{3}\right) + 8\left(\frac{U_n + 3V_n}{4}\right) - 3U_n - 8V_n = 0$$

و منه المتتالية (W_n) ثابتة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $W_n = W_0 = 3U_0 + 8V_0 = 99$

- بما أن (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس نهاية ℓ فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 3\ell + 8\ell = 11\ell$$

لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 99$ إذن $11\ell = 99$ و منه $\ell = 9$

2-5 تعريف

القول أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان يعني أن إحدهما متناقصة و الأخرى متزايدة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \text{ و}$$

$$\begin{array}{c} U_n \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ V_n \end{array}$$

مثال -

$$U_n = 2 - \frac{1}{n+1} \text{ و } V_n = 2 + \frac{1}{n+1}$$

المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n+1} = 0 \text{ و}$$

مبرهنة

إذا كانت المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتين فإن كليهما متقاربتان و لهما نفس النهاية.

الإثبات

لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

- نبرهن أولاً أن $V_n \geq U_n$

- لتكن المتتالية (W_n) العرفية بـ $W_n = V_n - U_n$

- ندرس اتجاه تغير (W_n)

$$W_{n+1} - W_n = (V_{n+1} - U_{n+1}) - (V_n - U_n) = (V_{n+1} - V_n) - (U_{n+1} - U_n)$$

بما أن (U_n) متزايدة فإن $U_{n+1} - U_n \geq 0$

وبما أن (V_n) متناقصة فإن $V_{n+1} - V_n \leq 0$

و منه نستنتج أن المتتالية (W_n) متناقصة و تقترب من الصفر.

لنبرهن بالخلف أن كل حدودها موجبة.

نفرض أن أحد حدودها W_p سالب تماماً و لتكن قيمته $-a$ حيث $a > 0$.

المتتالية $1, 1,41, 1,414, \dots$ متزايدة.
المتتالية $2, 1,5, 1,42, 1,415, \dots$ متناقصة.
هاتان المتتاليتان لهما نهاية مشتركة $\sqrt{2}$.

تمرين تدريبي 1

لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :

$$U_0 = 2, V_0 = 3, U_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}, V_{n+1} = \frac{2U_n + 3V_n}{5}$$

(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_n - U_n > 0$

(2) بين أن المتتالية (W_n) المعرفة بـ $W_n = V_n - U_n$ هي متتالية هندسية .

(3) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان .

(4) احسب $U_{n+1} + V_{n+1}$ بدلالة $U_n + V_n$ ثم مابا يمكن القول عن المتتالية (X_n)

المعرفة بـ $X_n = U_n + V_n$ ثم استنتج النهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) .

✓ الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $V_n - U_n > 0$ "

- p_0 صحيحة لأن $V_0 - U_0 = 3 - 2 = 1 > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $V_n - U_n > 0$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} > 0$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(2U_n + 3V_n) - (3U_n + 2V_n)}{5} = \frac{1}{5} (V_n - U_n)$$

إذن $V_{n+1} - U_{n+1} > 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(2) (W_n) متتالية هندسية أساسها q يكافئ $W_{n+1} = qW_n$

$$q = \frac{1}{5} \text{ إذن } W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{5} (V_n - U_n) = \frac{1}{5} W_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n + 2V_n}{5} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{5} = \frac{2}{5} W_n$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n + 3V_n}{5} - V_n = \frac{2U_n - 2V_n}{5} = -\frac{2}{5} W_n$$

$$\text{بما أن } W_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n > 0 \text{ فإن } U_{n+1} - U_n > 0 \text{ و } V_{n+1} - V_n < 0$$

مما يدل على أن (U_n) متزايدة وأن (V_n) متناقصة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \text{ وبما أن } W_n = V_n - U_n \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

إذن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان وبالتالي فهما متقاربتان.

المتتالية (W_n) متناقصة إذن كل حدودها ابتداء من W_p تكون أصغر من $-a$ وبالتالي المجال $]-a, a[$ لا يشمل كل حدود (W_n) ابتداء من رتبة معينة و عليه المتتالية (W_n) لا تؤول إلى الصفر وهذا يناقض الفرضية.

إذن كل حدود (W_n) موجبة.

ومنه نستنتج أن $V_n - U_n \geq 0$ أي $V_n \geq U_n$ من أجل كل n .

- نبين أن (U_n) و (V_n) متقاربتان

نعلم أن $V_n \geq U_n$ ولكن (V_n) متناقصة و كل حدودها أصغر من V_0 و عليه من أجل كل n $V_0 > V_n \geq U_n$ مما يفسر أن (U_n) محدودة من الأعلى.

المتتالية (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة و لتكن ℓ نهايتها .

وبنفس الطريقة نبين أن (V_n) محدودة من الأسفل بـ U_0 و متناقصة

فهي إذن متقاربة نحو ℓ .

- نبين أن $\ell = \ell$:

نعلم أن (U_n) و (V_n) تقتربان على التوالي إلى ℓ و ℓ و حسب القواعد العملية للنهايات نجد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell - \ell$$

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$ فإن $\ell - \ell = 0$ أي $\ell = \ell$

خاصية

كل عدد حقيقي يمكننا حصره بواسطة حدود متتابعة لمتتاليتين (a_n) و (b_n)

بحيث المتتالية (a_n) متزايدة و المتتالية (b_n) متناقصة و $b_n - a_n = 10^{-n}$

هذا العدد الحقيقي هو النهاية المشتركة للمتتاليتين المتقاربتين للأعداد العشرية.

الإنبات

ليكن x عدد حقيقي بحيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $a_n < x < b_n$

$$\text{و } b_n - a_n = 10^{-n}$$

إذا كانت (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^{-n} = 0$

فإن للمتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان وبالتالي تقتربان إلى نفس النهاية ℓ

و بتطبيق نظرية الحصر نجد أن للمتتاليتين تقتربان نحو x .

مثال -

تعطي الآلة الحاسبة $\sqrt{2} = 1,41421356$ و منه يمكننا كتابة الحصر التالي :

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \text{ إذن } a_0 < \sqrt{2} < b_0 \text{ مع } a_0 = 1 \text{ و } b_0 = 2 \text{ و } b_0 - a_0 = 10^{-0} = 1$$

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \text{ إذن } a_1 = 1,4 \text{ و } b_1 = 1,5 \text{ و } b_1 - a_1 = 0,1 = 10^{-1}$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \text{ إذن } a_2 = 1,41 \text{ و } b_2 = 1,42 \text{ و } b_2 - a_2 = 0,01 = 10^{-2}$$

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \text{ إذن } a_3 = 1,414 \text{ و } b_3 = 1,415 \text{ و } b_3 - a_3 = 10^{-3}$$

$$U_{n+1} + V_{n+1} = \frac{5U_n + 5V_n}{5} = U_n + V_n \quad (4)$$

إذن للمتتالية (X_n) ثابتة و عليه فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = U_0 + V_0 = 5$

و من جهة أخرى $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell + \ell = 2\ell$

$$\text{إذن } 2\ell = 5 \text{ منه } \ell = \frac{5}{2}$$

6 - حصر مقادير باستعمال المتتاليات المتجاورة

لتحديد مقدار مجهول S (مساحة ، طول ، حجم ، عدد ...) يتحتم علينا إيجاد حصر أكثر فأكثر دقة لـ S بمقادير معلومة.

في المرحلة الأولى نحصل على $V_0 < S < U_0$

و في المرحلة الثانية $V_0 < V_1 < S < U_1 < U_0$

و في المرحلة n نحصل على $V_0 < V_1 < \dots < V_n < S < U_n < \dots < U_1 < U_0$

نعيد هذه العملية بعدد غير منته من المرات، فنحصل على متتالية (V_n) متزايدة و المتتالية

(U_n) متناقصة . و متتالية الفرق $U_n - V_n$ تقترب نحو الصفر.

المجالات $[V_0, U_0], [V_1, U_1], \dots, [V_n, U_n], \dots$ أطوالها تقترب من الصفر،

مما يجعل المجال $[V_n, U_n]$ حصرا دقيقا لـ S .

تمرين تدريبي 1

نريد حساب قيمة مقربة للمساحة A للحيز D المحد بالمنحنى (C_f) الممثل

للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ و السنتقيمت التي معادلاتها هي $x=1$ و $x=2$ و $y=0$.

D هو مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي للتسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

(وحدة الطول 1 سم) بحيث $x \geq 1$ و $y \geq 0$ و $f(x) \geq y$.

على محور الفواصل نعلم النقطتين A و B فاصلتيهما على التوالي 1 و 2

و ليكن n عدد طبيعي معطى حيث $n \geq 2$.

نقسم القطعة $[AB]$ إلى n قطع متقايسة و على كل قطعة نرسم مستطيلين

أحد رأسيهما العلويين ينتمي إلى (C_f) .

و هكذا نحصل على n مستطيل سفلي يقع تحت C_f و n مستطيل علوي كما

هو موضح في الشكل . نرمز بـ S_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات السفلية

و S_n إلى المساحة الكلية للمستطيلات العلوية نحصل هكذا على متتاليتين

عدديتين s_n و S_n اللتان تحصران المساحة A أي $s_n < A < S_n$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون

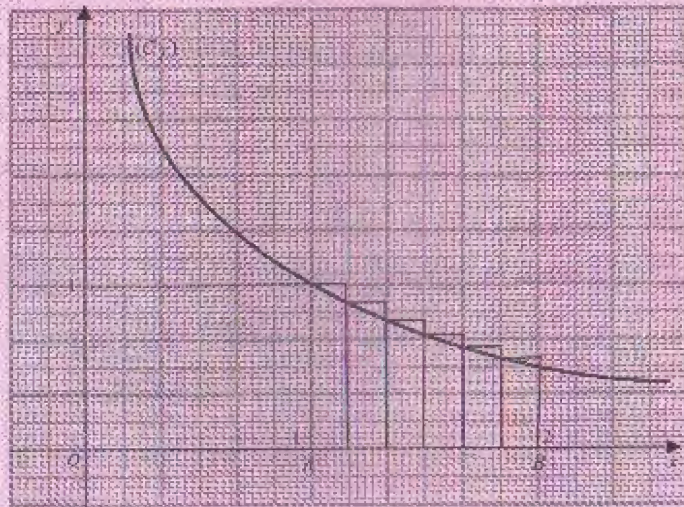
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \text{ و } s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(2) بين أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة.

(3) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$ ماذا تستنتج ؟

(4) عين أصغر عدد طبيعي p حيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} و عدد q

بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} .



✓ الحل

(1) - مساحة المستطيل السفلي الأول هي :

$$\frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{n+1}$$

مساحة المستطيل السفلي الثاني هي ،

$$\frac{1}{n} \times f\left(1 + \frac{2}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{n+2}$$

و هكذا حتى نصل إلى المستطيل السفلي الأخير الذي مساحته $\frac{1}{n} \times f(2)$ و تساوي $\frac{1}{2n}$

إذن للمساحة الكلية للمستطيلات السفلية هي $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

- مساحة المستطيل العلوي الأول هي :

$$\frac{1}{n} \times f(1) \text{ و تساوي } \frac{1}{n}$$

مساحة المستطيل العلوي الثاني هي :

$$\frac{1}{n} \times f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{n+1}$$

مساحة المستطيل العلوي الأخير هي :

$$\frac{1}{n} \times f\left(2 - \frac{1}{n}\right) \text{ و تساوي } \frac{1}{2n-1}$$

إذن المساحة الكلية للمستطيلات العلوية هي :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

(2) إثبات أن (s_n) متناقصة.

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n+1+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

- إثبات أن (S_n) متزايدة.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \end{aligned}$$

$S_n > 0$ ومنه فإن (S_n) متزايدة.

(3) بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ و $S_n - s_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ بما أن (s_n) متزايدة و (S_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - s_n) = 0$ فإن (s_n) و (S_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية ℓ و حسب نظرية الحصر فإن $A = \ell$

(4) تعيين p بحيث s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} .

s_p قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2} هذا معناه أن (1) $|s_p - A| < 10^{-2}$

و بما أن (s_n) متزايدة تماما فإن $|s_{p+1} - A| < 10^{-2}$

$$\text{ولدينا } |s_{p+1} - s_p| = |(s_{p+1} - A) - (s_p - A)|$$

$$\text{لكن } |(s_{p+1} - A) - (s_p - A)| \leq |s_{p+1} - A| + |s_p - A|$$

$$\text{أي } |s_{p+1} - s_p| \leq |(s_{p+1} - A)| + |s_p - A| < 10^{-2} + 10^{-2}$$

$$\text{ومنه نجد } |s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2}$$

$$|s_{p+1} - s_p| < 2 \times 10^{-2} \text{ يكافئ } \frac{1}{2(p+1)(2p+1)} < \frac{2}{10} \text{ يكافئ } p \in]2.79, +\infty[$$

وبما أن p عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 فإن أصغر قيمة ممكنة لـ p هي 3. و في هذه الحالة تكون القيمة المقربة بالنقصان لـ A إلى 10^{-2} هي $s_3 \approx 0.61$

- تعيين q بحيث S_q قيمة مقربة لـ A إلى 10^{-2}

$$\text{بنفس الطريقة نجد } |S_{q+1} - S_q| < 2 \times 10^{-2}$$

$$\text{ومنه نجد } \frac{1}{2q(2q+1)} < \frac{2}{10} \text{ وبالتبسيط نجد } 2q^2 + q - 25 > 0$$

$$\text{و عليه } p \in]3.29, +\infty[$$

إذن أصغر قيمة لـ q هي 4

إذن S_4 هي قيمة مقربة بالزيادة لـ A إلى 10^{-2}

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \approx 0.75 \text{ إذن } 0.61 < A < 0.75$$

العدد A هو عدد شهير، وهو اللوغاريتم النيري لـ 2.



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

نهاية المتتاليات

(1) المتتالية (U_n) معرفة من أجل كل $n \geq 2$ بـ $U_n = \frac{2n+1}{n-1}$ نهايتها 2. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$

(2) للمتتالية (V_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2 \sqrt{n}$ نهايتها $(+\infty)$. أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن V_n تنتمي إلى المجال $]10^5 ; +\infty[$

الحل

(1) الحدود U_n تنتمي إلى المجال $]1,98 ; 2,02[$ يعني أن $2,02 > \frac{2n+1}{n-1} > 1,98$ وبطرح (2) من حدود هذه الأخيرة نجد $0,02 > \frac{3}{n-1} > -0,02$ وبالضرب في $10^2(n-1)$ نجد $2(n-1) > 3 > -2(n-1)$ (I) المتباينة $2(n-1) > 3$ دوما محققة ومنه المتباينة (I) تكافئ $2(n-1) > 3$ $2(n-1) > 5$ تكافئ $2n > 7$ تكافئ $n > \frac{7}{2}$ ومنه قيمة n_0 المطلوبة هي 3.

(2) الحدود V_n تنتمي إلى $]10^5 ; +\infty[$ هذا يعني $n^2 \sqrt{n} > 10^5$ أي $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ $n^{\frac{5}{2}} > 10^5$ يكافئ $(\sqrt{n})^5 > 10^5$ يكافئ $\sqrt{n} > 10$ يكافئ $n > 100$ ومنه قيمة n المطلوبة هي 101.

تطبيق 2

حصر متتالية - نهاية متتالية باستعمال نظرية الحصر

(1) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ $U_n = (\frac{n-1}{10})^n$ احسب U_1, U_2, U_3, U_4

(2) بين أنه إذا كان $n > 25$ فإن $(\frac{3}{2})^n > U_n$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

الحل

$$u_2 = (\frac{2}{10}-1)^2 = \frac{64}{100}, u_1 = (\frac{1}{10}-1)^1 = \frac{-9}{10}$$

$$u_4 = \frac{81}{625}, u_3 = (\frac{3}{10}-1)^3 = \frac{-343}{1000}$$

(2) إذا كان $n > 25$ فإن $\frac{n}{10} - 1 > \frac{3}{2}$ ومنه $(\frac{n}{10}-1)^n > (\frac{3}{2})^n$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{2})^n = +\infty$ وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

تطبيق 3

نهاية متتالية

ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) مجدا القاعدة المستعملة

(أ) $U_n = \frac{3n^2+5n+1}{n^2+n+1}$ (ب) $U_n = 3n - \frac{1}{3n+2}$ (ج) $U_n = \frac{5n+2}{3n-2}$

(د) $U_n = \cos(\frac{n\pi+1}{2n+1})$ (هـ) $U_n = \sqrt{\frac{3n-1}{n+1}}$

(و) $U_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ (ي) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$

الحل

(أ) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{3n^2} = \frac{3}{3} = 1$ (نهاية دالة ناطقة).

(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3n+2} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ (قاعدة مجموع متتاليتين)

(ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^2} = 3$ (نهاية دالة ناطقة).

(د) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{3n-1}{n+1}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 3$ و f مستمرة عند 3 فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(3) = \sqrt{3}$ (نهاية متتالية (U_n) من الشكل $(U_n = f(V_n))$)

(هـ) $U_n = f(V_n)$ حيث $V_n = \frac{n\pi+1}{2n+1}$ و $f(x) = \cos x$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$ و الدالة f مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

(و) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3n+2}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2+3n+2}}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}) (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = 0$

(ي) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{0}{1} = 0$

تطبيق 4

حساب نهاية متتالية بالاعتماد على متتالية حسابية

(1) U_n و V_n متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_0 = 2$

و $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ و $V_n = \frac{3}{U_n}$

(2) بين أن المتتالية (V_n) حسابية . (ب) احسب V_n ثم U_n بدلالة n

(3) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

✓ الحل

(1) نسمي الخاصية " $U_n > 0$ "

P_0 صحيحة لأن $U_0 = 2 > 0$

- نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي n أي $U_n > 0$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$.

بما أننا فرضنا $U_n > 0$ فإن $1 + U_n > 0$ ومنه $\frac{U_n}{1+U_n} > 0$

النتائج و المتتاليات

إذن $U_{n+1} > 0$ بالتالي P_{n+1} صحيحة و عليه P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) (V_n) حسابية أساسها q يعني $V_{n+1} = V_n + q$

$V_{n+1} = \frac{3}{U_{n+1}} = \frac{3}{\frac{U_n}{1+U_n}} = 3 \frac{(1+U_n)}{U_n} = \frac{3}{U_n} + 3 = V_n + 3$

إذن (V_n) حسابية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $V_0 = \frac{3}{U_0} = \frac{3}{2}$

(ب) بما أن (V_n) حسابية حددها الأول V_0 أساسها q

فإن عبارة الحد العام هي $V_n = V_0 + qn$ إذن $V_n = \frac{3}{2} + 3n$

- لدينا $V_n = \frac{3}{U_n}$ و منه $U_n = \frac{3}{V_n}$ بالتعويض نجد $U_n = \frac{3}{\frac{3}{2} + 3n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{3}{2} + 3n} = 0$

تطبيق 5

المتتاليات المحدودة

(1) (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم

بـ $U_n = 2 - \frac{3}{n^2}$ بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

(2) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $1 \leq V_n \leq 3$.

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n لدينا $n^2 \geq 1$

بالقلب نجد $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}$ بالضرب في -3 نجد $-3 \leq -\frac{3}{n^2}$

وبإضافة 2 نجد $2 - \frac{3}{n^2} \geq -1$ أي $-1 < U_n < 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة لأنها محدودة من الأعلى و من الأسفل.

$V_n = \frac{(n^2+n+1)+(2n+2)}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n+1} + \frac{2(n+1)}{n^2+n+1} = 1 + 2 \frac{n+1}{n^2+n+1}$ (2)

(ج) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ بالجزء نجد :

$$W_n \geq U_n \geq V_n \text{ أي } \sqrt{n+4} \geq \sqrt{n+3} \geq \sqrt{n+2}$$

$$\text{حيث } V_n = \sqrt{n+2} \text{ و } W_n = \sqrt{n+4}$$

$$(د) \frac{1}{\sqrt{n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \text{ بالقلب نجد } \sqrt{n+4} \geq \sqrt{n+3} \geq \sqrt{n+2}$$

$$\text{أي } V_n \leq U_n \leq W_n \text{ حيث } V_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}} \text{ و } W_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

تطبيق 7

حساب نهاية متتالية باستعمال الحصر

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة بـ } U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 < U_n \leq \sqrt{2}$

(2) بين أنه إذا كانت $n > 10^4$ فإن $0 < U_n < 10^{-2}$

(ب) بين أنه إذا كانت $n > 10^8$ فإن $0 < U_n < 10^{-4}$

(ج) كيف نختار n بحيث $U_n < 10^{-8}$ ؟ ما هي نهاية (U_n) ؟

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n > n+2 > n+4$ بجذر الطرفين نجد $\sqrt{n} > \sqrt{n+2} > \sqrt{n+4}$ بالتالي :

$$U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} > 0$$

$$U_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{2}$ و $\sqrt{n} \geq 0$ ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ بالقلب نجد } \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \sqrt{2} \text{ أي } U_n \leq \sqrt{2} \text{ إذن } 0 < U_n \leq \sqrt{2}$$

(2) (أ) إذا كان $n > 10^4$ فإن $\sqrt{10^4} > \sqrt{10^4+2} > \sqrt{10^4+4}$ و $\sqrt{n} > 10^2$

$$\text{وبالتالي يكون } 2 \times 10^2 > \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2 \times 10^2}$$

$$\text{وبالضرب في 2 نجد } U_n < 10^{-2}$$

(ب) إذا كان $n > 10^8$ فإن $\sqrt{10^8} > \sqrt{10^8+2} > \sqrt{10^8+4}$ و $\sqrt{n} > 10^4$ وبالتالي يكون :

$$2 \times 10^4 > \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2 \times 10^4} \text{ إذن } U_n < 10^{-4}$$

$$\text{بما أن } 0 < \left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) \leq 1 \text{ فإن } 1 + 2\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) \geq 1 \text{ أي } V_n \geq 1$$

$$\text{وبما أن } n^2+n+1 \geq n+1 \text{ فإن } \frac{n+1}{n^2+n+1} \leq 1$$

$$\text{وبضرب طرفي هذه المتباينة في 2 نجد } 2\left(\frac{n+1}{n^2+n+1}\right) \leq 2 \text{ بإضافة 1 نجد } V_n \leq 3$$

$$\text{إذن } 1 \leq V_n \leq 3$$

تطبيق 6

حصر متتالية بمتنيتين

من أجل كل متتالية (U_n) من المتتالية الآتية أوجد متنيتين (V_n) و (W_n) مختلفتين عن (U_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$.

$$(أ) U_n = \frac{n+3}{n+2}$$

$$(ب) U_n = \frac{5n^2-4n+7}{n-1} \text{ مع } n \geq 2$$

$$(ج) U_n = \sqrt{3+n}$$

$$(د) U_n = \frac{1}{\sqrt{3+n}}$$

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $n+4 \geq n+3 \geq n+2$ (1)

$$(2) \text{ } \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3}$$

$$\text{بضرب حدود (1) و (2) طرفاً لطرف نجد } \frac{n+4}{n+1} \geq U_n \geq \frac{n+2}{n+3}$$

$$\text{ومنه } W_n = \frac{n+4}{n+1} \text{ و } V_n = \frac{n+2}{n+3}$$

(ب) من أجل عدد طبيعي $n \geq 2$ يكون $U_n = n-3 + \frac{4}{n-1}$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 2 \text{ يكون } n-1 \geq 1 \text{ ومنه } 0 < \frac{1}{n-1} \leq 1$$

$$\text{بالضرب في 4 نجد } 0 < \frac{4}{n-1} \leq 4$$

$$\text{وبإضافة } n-3 \text{ نجد } n-3+0 \leq n-3+\frac{4}{n-1} \leq n-3+4$$

$$\text{أي } n-3 \leq U_n \leq n+1 \text{ إذن } W_n = n+1 \text{ و } V_n = n-3$$

جـ) من السؤال (1) و (ب) نستنتج أنه يمكن اختيار $n > 10^{16}$ بحيث يحقق $U_n < 10^{-8}$.
- نلاحظ أنه كلما كبر n فإن المجال الذي تنتمي إليه الحدود U_n يصغر و يقترب نحو الصفر ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

تطبيق 8

دراسة تقارب متتاليات - البرهان بالتراجع

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2}$.
(1) ا) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $U_n = \sqrt{1+n}$.
ب) ادرس تقارب المتتالية (U_n).
(2) نضع $V_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ و $W_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ادرس تقارب هاتين المتتاليتين.

الحل

(1) ا) نسمي p_n الخاصية " $U_n = \sqrt{1+n}$ "
 p_0 صحيحة لأن $U_0 = 1 = \sqrt{1+0}$
- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أي $U_n = \sqrt{1+n}$
ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} = \sqrt{2+n}$
 $U_{n+1} = \sqrt{1+U_n^2} = \sqrt{1+(\sqrt{1+n})^2} = \sqrt{2+n}$
منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+n} = +\infty$ منه (U_n) متتالية متباعدة.
(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{+\infty}{+\infty}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$
بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{1} = 1$ إذن المتتالية (V_n) متقاربة.
- $W_n = \frac{U_n + U_{n+1}}{U_{n+2}}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \frac{+\infty}{+\infty}$ عدم التعيين.
 W_n تكتب $W_n = \frac{\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}}$

إذن للمتتالية (W_n) متقاربة. $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{3+n}} + \frac{\sqrt{2+n}}{\sqrt{3+n}} \right) = 1 + 1 = 2$

تطبيق 9

دراسة تقارب متتالية و حساب نهايتها

(U_n) متتالية حدودها موجبة معرفة بـ $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $n^2 U_n^2 - (n-1)^2 U_{n-1}^2 = n$.
(1) لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \geq 1$ بـ $V_n = n^2 U_n^2$.
ا) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} - V_n = n+1$.
ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n .
(2) استنتج أن للمتتالية (U_n) متقاربة يطلب إيجاد نهايتها.

الحل

(1) ا) من المساواة (1) نجد $V_n - V_{n-1} = n$
باستبدال n بـ $n+1$ نحصل على $V_{n+1} - V_n = n+1$.
ب) من العلاقة $V_{n+1} - V_n = n+1$ نجد:
 $V_2 - V_1 = 2$
 $V_3 - V_2 = 3$
 $V_4 - V_3 = 4$
 \vdots
 $V_{n-1} - V_{n-2} = n-1$
 $V_n - V_{n-1} = n$
بجمع أطراف المساويات طرفاً إلى طرف نجد $V_n - V_1 = 2+3+\dots+n$
ومنه $V_n = 1+2+3+\dots+n$ وبما أن $V_1 = 1$ فإن $V_n = 1+2+3+\dots+n$
 V_n مجموع n حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1
ومنه $V_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $U_n^2 = \frac{V_n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$ ومنه $U_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{\frac{1}{2}}$ وبالتالي المتتالية (U_n) متقاربة.

تطبيق 10

اتجاه تغير متتالية - تقارب متتالية

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_0 = 5$ و $U_{n+1} = 3 + \frac{U_n}{4}$

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n+1 \geq 1$ و منه $\sqrt{n+1} \geq 1$

بالقلب نجد $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

$$(2) \quad |U_{n+1}| = \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}} \right| \text{ منه } U_{n+1} = \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$$

بما أن $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ و $0 \leq |\sin n| \leq 1$ فإن $0 < \frac{|\sin n|}{\sqrt{n+1}} \leq 1$ أي $|U_{n+1}| \leq 1$

هذا معناه أن $-1 \leq U_{n+1} \leq 1$ أي $-2 \leq U_n \leq 0$ إذن المتتالية (U_n) محدودة.

دراسة تقارب متتالية

تطبيق 12

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

(1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

(2) احسب $U_{2n} - U_n$. (ب) استنتج أن $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

(3) بفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $U_{2n} \geq \frac{n}{2}$

هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

✓ الحل

$$(1) \quad U_{n+1} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\frac{1}{n+1} > 0$ فإن $U_{n+1} - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة

$$(2) \quad U_{2n} - U_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(ب) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n+1 \leq n+2 \leq n+3 \leq n+4 \leq \dots \leq 2n$

بالقلب نجد $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+3} \geq \dots \geq \frac{1}{2n}$

(أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > \frac{9}{2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير (U_n)

(ج) استنتج أن (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

✓ الحل

(أ) تسمى p_n الخاصية " $U_n > \frac{9}{2}$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 9$ و $9 > \frac{9}{2}$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي أي $U_n > \frac{9}{2}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

لدينا فرضاً $U_n > \frac{9}{2}$ بالضرب في $\frac{1}{3}$ نجد $\frac{U_n}{3} > \frac{3}{2}$

وبإضافة 3 نجد $3 + \frac{U_n}{3} > \frac{9}{2}$ أي $U_{n+1} > \frac{9}{2}$

إذن p_{n+1} صحيحة وبالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2})$

بما أن $U_n - \frac{9}{2} > 0$ فإن $-\frac{2}{3}(U_n - \frac{9}{2}) < 0$ أي $U_{n+1} - U_n < 0$ مما يدل أن (U_n) متناقصة.

(ج) بما أن (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l الذي هو

جذر للمعادلة $x = f(x)$ حيث $f(x) = 3 + \frac{x}{3}$

$x = 3 + \frac{x}{3}$ يكافئ $\frac{2}{3}x = 3$ يكافئ $x = \frac{9}{2}$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $l = \frac{9}{2}$ مقبول وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{9}{2}$

دراسة المتتالية المحدودة

تطبيق 11

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1$

(2) (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = -1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$

هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى؟ من الأسفل؟ محدودة؟

$$U_{2n} - U_n \geq n \times \frac{1}{2n} \quad \text{أي} \quad U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$$

(3) بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} = +\infty$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة (حسب نظرية الحصر).

تطبيق (18)

البرهان بالتراجع - دراسة تقارب متتالية

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- (2) استنتج أن المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ محدودة من الأعلى ومتقاربة.

✓ الحل

(1) نسمي p_n الخاصية " $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ "

p_1 صحيحة لأن $\frac{1}{1!} = 1$ و $\frac{1}{2^{1-1}} = 1$ و $1 \leq 1$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n غير معلوم أي $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

بضرب طرفي المتباينة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في $\frac{1}{n+1}$ نجد $\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$

أي $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$ (1)

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

فإن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n}$ (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

إذن p_{n+1} صحيحة بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$\vdots$$

بجمع أطراف المتباينات طرف لطرف نجد:

$$U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{أي} \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{ومنه} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{إذن} \quad U_n \leq 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$\text{لدينا} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0 \quad \text{ومنه} \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

$$\text{بالضرب في 2 نجد} \quad 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] \leq 2 \quad \text{إذن} \quad U_n \leq 2$$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى.

$$- \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معلوم } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما و بما أنها محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

تطبيق (19)

المتتالية الدورية

(U_n) متتالية دورية إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي غير معلوم p بحيث من

$$U_{n+p} = U_n \quad \text{يكون}$$

لكن للمتتالية (U_n) المعرفة بـ $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n + U_{n+1} = 5 \end{cases}$

بين أن (U_n) دورية. هل (U_n) رتيبة ؟

✓ الحل

$$U_{n+p} = 5 - U_{n+p-1} = 5 - (5 - U_{n+p-2}) = U_{n+p-2}$$

$$\text{بما أن} \quad U_{n+p-2} = U_n \quad \text{و} \quad U_{n+p} = U_n$$

فإنه ينتج من أجل كل n لدينا $n + p - 2 = n$ أي $p = 2$

و بالتالي (U_n) دورية دورها 2 .

$$U_{n+1} - U_n = 5 - 2U_n -$$

إذا كان n زوجي فإن $5 - 2U_n > 0$ و بالتالي $U_{n+1} - U_n > 0$
و إذا كان n فردي فإن $5 - 2U_n < 0$ و بالتالي $U_{n+1} - U_n < 0$
إذن إشارة $U_{n+1} - U_n$ ليست ثابتة و بالتالي (U_n) ليست رتيبة.

تطبيق 15

تعيين نهاية متتالية بطريقتين مختلفتين

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 0 \text{ و } U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n}$$

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي موجب تماما } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج تقاربها.

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x \in [0, \pi] \text{ يكون } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$$

(ب) بين عندها أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$
و استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

✓ الحل

$$(1) \text{ نسمي } p_n \text{ الخاصية " } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1 \text{ "}$$

$$- p_1 \text{ صحيحة لأن } U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$$

$$- \text{نفرض أن } p_n \text{ صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي } n \text{ غير معلوم أي } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1$$

$$\text{ونبرهن أن } p_{n+1} \text{ صحيحة أي } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$\text{لدينا } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1 \text{ بإضافة 1 إلى حدود هذه المتباينة نجد } \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \leq U_n + 1 \leq 2$$

$$\text{بالجذر نجد } \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \leq \sqrt{U_n + 1} \leq \sqrt{2} \text{ بالضرب في } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ نجد،}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لأن } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \leq U_{n+1} \leq 1$$

إذن p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} - U_n = \frac{\frac{1}{2}(1+U_n) - U_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} + U_n} = \frac{(U_n - 1)(-2U_n - 1)}{2(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} + U_n)} \quad (ب)$$

$$\text{بما أن } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_n \leq 1 \text{ فإن } -2U_n - 1 \leq 0 \text{ و } U_n - 1 \leq 0 \text{ ومنه}$$

$$(U_n - 1)(-2U_n - 1) > 0 \text{ بالتالي } U_{n+1} - U_n > 0 \text{ أي } (U_n) \text{ متزايدة}$$

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l الذي هو

$$\text{جذر للمعادلة } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+x} \text{ يكافئ } 2x^2 - x - 1 = 0 \text{ يكافئ } (x=1) \text{ أو } (x=-\frac{1}{2})$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

(2) (ا) لدينا من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا،

$$\cos^2 x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \text{ و } \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\text{منه ينتج } \frac{1+\cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \text{ إذن } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$

$$\text{بما أن } \frac{x}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ فإن } \cos \frac{x}{2} > 0 \text{ ومنه } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$$

$$(ب) \text{ نسمي } p_n \text{ الخاصية " } U_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ "}$$

$$- p_0 \text{ صحيحة لأن } U_0 = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$- \text{نفرض أن } p_n \text{ صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي } n \text{ أي } U_n = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

$$\text{ونبرهن أن } p_{n+1} \text{ صحيحة أي } U_{n+1} = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right)$$

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1+U_n} = \sqrt{\frac{1+\cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right)}{2}} = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

منه p_{n+1} صحيحة إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = 1$$

تطبيق 16

لجيب المقارنة والنهاية

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

(1) بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

(2) استنتج تقارب التتالية (U_n) ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

(1) (U_n) مجموع n حدا أصغرها $\frac{n}{n^2+1}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+n}$

وعليه يكون $\frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$

ومنه نجد $n(\frac{n}{n^2+n}) \leq U_n \leq n(\frac{n}{n^2+1})$ أي $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

لأن $n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$

(2) بما أن $W_n \leq U_n \leq V_n$ حيث $W_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ و $V_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ و (W_n) و (V_n) متقاربتان

ولهما نفس النهاية فإن التتالية (U_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1$



تطبيق 17

لجيب النهايات والخصر

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{9}{U_n}) \end{cases}$

(1) برهن بالتراجع أن التتالية (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3

(2) ادرس اتجاه تغير (U_n)

(3) بين بالتراجع أن $U_n \leq \frac{1}{2} + 3$ ثم استنتج نهاية (U_n)

✓ الحل

(1) (U_n) محدودة من الأسفل بـ 3 هذا معناه أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_n \geq 3$

نسمي p_n الخاصية " $U_n \geq 3$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $4 \geq 3$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n أي $U_n \geq 3$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \geq 3$

الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{9}{x})$ متزايدة تماما على $[3, +\infty[$

لأن $f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{x^2-9}{x^2})$ و $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \geq 3$.

بما أن f متزايدة تماما على $[3, +\infty[$ و $U_n \geq 3$

فإن $f(U_n) \geq f(3)$ أي $U_{n+1} \geq 3$

لكن $f(3) = 3$ إذن $U_{n+1} \geq 3$ وهذا يعني أن p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + \frac{9}{U_n}) - U_n = -\frac{1}{2}(U_n - \frac{9}{U_n}) \quad (2)$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}(\frac{U_n^2 - 9}{U_n}) = -\frac{1}{2} \frac{(U_n - 3)(U_n + 3)}{U_n}$$

بما أن $U_n \geq 3$ فإن $(U_n - 3) \geq 0$ و $(U_n + 3) > 0$

$$\text{ومنه } -\frac{1}{2} \frac{(U_n - 3)(U_n + 3)}{U_n} \leq 0$$

أي $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وهذا يعني (U_n) متناقصة.

(3) نسمي p_n الخاصية " $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$ "

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 4$ و $3 + \frac{1}{2^0} = 4$ و $4 \leq 4$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$

و نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$

لدينا $U_n \geq 3$ منه ينتج $\frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2}$ (1)

من الفرض $U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$ ينتج $\frac{1}{2} U_n \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$ (2)

بجمع طرفي (1) و (2) طرفا لطرف نجد $\frac{1}{2} U_n + \frac{9}{2U_n} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$

أي $U_{n+1} \leq 3 + \frac{1}{2^{n+1}}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

- بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$ فإن حسب نظرية الحصر $3 \leq U_n \leq 3 + \frac{1}{2^n}$

تطبيق 18

المجموعة المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $2U_{n+1} = U_n - 1$

(1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

(2) α عدد حقيقي و (V_n) متتالية معرفة من أجل كل n بـ $V_n = U_n - \alpha$

(أ) عين قيمة α حتى تكون (V_n) هندسية

(ب) اكتب V_n و U_n بدلالة n ثم ادرس تقارب المتتالية (U_n)

(ج) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}[$

الحل

(1) من المعطيات نجد $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2}$

$$U_5 = -\frac{15}{16}, U_4 = -\frac{7}{8}, U_3 = -\frac{3}{4}, U_2 = -\frac{1}{2}, U_1 = 0$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} (V_n + \alpha) - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} V_n - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \quad (2)$$

حتى تكون (V_n) هندسية يجب أن يكون $-\frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} = 0$ أي $\alpha = -1$

$$(ب) \quad V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad V_0 = U_0 + 1 = 2 \quad \text{إذن} \quad V_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad U_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$ ومنه (U_n) متقاربة نحو -1

$$(ج) \quad U_n \in]-1-10^{-4}, -1+10^{-4}[\quad \text{هذا معناه أن} \quad -1-10^{-4} < 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 < -1+10^{-4}$$

$$\text{أي} \quad -10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 < -1+10^{-4} \quad \text{وبإضافة 1 نجد} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-4} + 1$$

$$\text{المتباينة} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{دوماً صحيحة يبقى لنا فقط إيجاد} \quad n \quad \text{بحيث} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-4} + 1$$

$$\text{بما أن} \quad 10^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{فإن} \quad n-1 \geq 4 \quad \text{أي} \quad n \geq 5$$

ومنه $n=5$ ومنه أصغر قيمة للعدد n هي 6.

تطبيق 19

المجموعة المتتاليات والادخار

نضع في بنك مبلغ قدره 25000 DA في أول جانفي 2008 بفائدة قدرها 5% لكل سنة ونسحب في نهاية كل سنة 2500 DA.

إذا كانت U_n القيمة بالدينار للمبلغ المتبقي في البنك في السنة n (أي السنة $2008+n$)

(1) أوجد علاقة تربط بين U_n و U_{n+1}

(2) بين أن المتتالية (V_n) للفرقة بـ $V_n = U_n - 50000$ هندسية بطلب تعيين أساسها

(3) ما هي السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك؟

الحل

(1) إذا كان U_n هو للمبلغ المتبقي في السنة $(2008+n)$ و U_{n+1} المبلغ المتبقي في السنة $(2008+n+1)$ فإن $U_{n+1} = U_n + 5\% \times U_n - 2500$

$$U_{n+1} = 1.05 U_n - 2500 \quad \text{ومنه نجد}$$

$$(2) \quad V_{n+1} = U_{n+1} - 50000 = 1.05 U_n - 2500 - 50000 = 1.05 (V_n + 50000) - 52500 = 1.05 V_n + 1.05 \times 50000 - 52500 = 1.05 V_n$$

إذن (V_n) هندسية أساسها $q = 1.05$

$$V_n = V_0 q^n \quad \text{مع} \quad V_0 = U_0 - 50000 = -25000$$

$$\text{ومنه} \quad V_n = -25000 (1.05)^n$$

$$\text{بما أن} \quad U_n = V_n + 50000 \quad \text{فإن} \quad U_n = -25000 (1.05)^n + 50000$$

(3) ينفذ رصيده من البنك هنا معناه $U_n = 0$ أي $(1.05)^n = 2$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة نجد} \quad n \approx 14.25$$

ومنه السنة التي ينفذ فيها رصيده من البنك هي $2008+15$ أي 2023.

تطبيق 20

المجموعة المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$

(1) بين بالتراجع أن $U_n \geq 0$

(2) بين أن المتتالية (U_n) رتيبة

(3) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(4) اكتب V_n و U_n بدلالة n معينا نهاية (U_n)

(5) أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n > 0,99$.

✓ الحل

(1) يمكن كتابة $U_{n+1} = 2 - \frac{3}{U_n + 2}$

نسمي الخاصية " $U_n \geq 0$ " 1

p_0 صحيحة لأن $U_0 = 0$ و $0 \geq 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $U_n \geq 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \geq 0$

لدينا $U_n \geq 0$ 1 منه ينتج $\frac{1}{3} > \frac{1}{U_n + 2} \geq \frac{1}{2}$

بالضرب في (-3) نجد $-\frac{3}{2} \leq \frac{-3}{U_n + 2} < -1$

وبإضافة 2 نجد $1 < \frac{U_n + 1}{U_n + 2} \leq \frac{1}{2}$ ومنه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - U_n = \frac{-U_n^2 + 1}{U_n + 2} = -\frac{(U_n - 1)(U_n + 1)}{U_n + 2} \quad (2)$$

بما أن $U_n \geq 0$ 1 فإن $-(U_n - 1) \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$ أي (U_n) متزايدة.

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} + 1} = \frac{U_n - 1}{3U_n + 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{U_n - 1}{U_n + 1} \right) = \frac{1}{3} V_n \quad (3)$$

منه (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 1} = -1$

$$(4) \text{ لدينا } V_n = V_0 q^n \text{ إذن } V_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$U_n = \frac{V_n + 1}{1 - V_n} \text{ يكافئ } V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$$

$$\text{إذن } U_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$(5) \quad 0,99 < U_n \text{ يكافئ } \frac{0,01}{1,99} < \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ يكافئ } \frac{1}{3^4} > \frac{1}{199} > \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و منه نجد $n > 4$ و عليه اصغر قيمة لـ n هي 5.

تطبيق 21

متتاليات التجاورة

a و b عدنان حقيقيان بحيث $0 < a < b$

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}

$$U_0 = a \text{ و } V_0 = b \text{ و } U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \text{ و } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

(1) بين أنه من أجل كل n تكون (U_n) و (V_n) موجبتين تماما.

(2) بين أنه من أجل كل n يكون $U_n \leq V_n$

(3) 1 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون:

$$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

(ب) استنتج أن $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

(4) 1 بين أن للتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

(ب) إذا كانت $\alpha = 2$ و $\beta = 5$ استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة

التقريبية للنهاية المشتركة لـ (U_n) و (V_n) بتقريب 10^{-3} .

✓ الحل

(1) تبين أنه من أجل كل n لدينا $U_n > 0$ و $V_n > 0$

نسمي الخاصية " $U_n > 0$ و $V_n > 0$ "

p_0 صحيحة لأن $V_0 = b$ و $U_0 = a$ و $a > 0$ و $b > 0$

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي أي $U_n > 0$ و $V_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$ و $V_{n+1} > 0$.

$$\text{بما أن } U_n > 0 \text{ و } V_n > 0 \text{ فإن } \frac{U_n + V_n}{2} > 0$$

أي $V_{n+1} > 0$

بما أن $U_n > 0$ و $V_n > 0$ فإن $U_n V_n > 0$

وبالتالي $\sqrt{U_n V_n} > 0$ أي $U_{n+1} > 0$

ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n .

(2) الخاصية " $U_n < V_n$ "

- p_0 صحيحة لأن $U_0 = a$ و $V_0 = b$ و $a < b$

- نفرض أن p_n صحيحة أي $U_n < V_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} < V_{n+1}$

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} - \frac{U_n + V_n}{2}$$

$$= \frac{U_n V_n - \left(\frac{U_n + V_n}{2}\right)^2}{\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{4\left(\sqrt{U_n V_n} + \frac{U_n + V_n}{2}\right)}$$

بما أن $-(U_n - V_n)^2 < 0$ فإن $U_{n+1} - V_{n+1} < 0$

أي $U_{n+1} < V_{n+1}$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n V_n} \quad (1)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{U_n + V_n}{2} - U_n \quad (V_n < U_n)$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} < (V_n - U_n) \times \frac{1}{2}$$

(ب) نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

- من أجل $n=0$ لدينا $V_0 - U_0 = b - a$ و $(b - a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = b - a$

نفرض أن الخاصية p_n صحيحة أي $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

ونبرهن أن الخاصية p_{n+1} صحيحة أي $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$

$$(V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b - a)$$

لدينا p_{n+1} صحيحة ومنه p_n صحيحة من أجل كل n

(4) (أ) تعيين اتجاه تغير المتتالية (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$$

- تعيين اتجاه تغير (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} = \frac{U_n (V_n - U_n)}{\sqrt{U_n V_n} + U_n} > 0$$

لأن $V_n - U_n > 0$ ومنه (U_n) متزايدة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

إذن (U_n) و (V_n) متجاورتان.

$$(ب) (1) \dots \dots \dots |U_n - V_n| \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ و } |U_n - \ell| < 10^{-3} \text{ و } |V_n - \ell| < 10^{-3}$$

$$\text{بما أن } |U_n - V_n| \leq |U_n - \ell| + |V_n - \ell| \text{ فإن } (2) \dots \dots \dots |U_n - V_n| \leq 2 \times 10^{-3}$$

حتى تكون (2) محققة يجب أن يكون $2 \times 10^{-3} < 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{أي } \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{3} \times 10^{-3} \text{ بالتبسيط نجد } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 66 \times 10^{-5}$$

ومنه قيمة n التي تحقق المتباينة الأخيرة هي 11 إذن القيمة التقريبية لـ ℓ هي U_{11}

تطبيق 22

المجموع المتتاليات من الشكل $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } U_1 = \frac{2}{7} \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - U_n}$$

(نقبل أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n \neq 0$ و $U_n \neq 3$)

(1) احسب U_2 و U_3 .

$$(2) (أ) (V_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } V_n = \frac{1}{U_n} \text{ احسب } V_1$$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون $V_{n+1} = 3V_n - 1$

$$(3) (W_n) \text{ متتالية معرفة بـ } W_n = V_n - \frac{1}{2} \text{ عبر عن } W_{n+1} \text{ بدلالة } W_n$$

ثم عين بدلالة n

(4) (أ) استنتج عبارة U_n بدلالة n

(ب) هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

✓ الحل

$$U_3 = \frac{U_2}{3-U_2} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{2}{19} \quad , \quad U_2 = \frac{U_1}{3-U_1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{2}{19} \quad (1)$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{19}{2} \quad (2)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{U_n}{3-U_n}} = \frac{3-U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 1 = 3\left(\frac{1}{U_n}\right) - 1 = 3V_n - 1 \quad (ب)$$

$$W_n = V_n - \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$W_{n+1} = V_{n+1} - \frac{1}{2} = (3V_n - 1) - \frac{1}{2} = 3V_n - \frac{3}{2} = 3\left(V_n - \frac{1}{2}\right) = 3W_n$$

$$W_1 = V_1 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2} - \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

(W_n) متتالية هندسية حدها الأول $W_1 = 9$ وأساسها $r = 3$

ومنه $W_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$ بالتعويض نجد $W_n = W_1 \times r^{n-1}$

$$U_n = \frac{1}{V_n} \quad \text{و} \quad V_n = W_n + \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$U_n = \frac{1}{3^{n+1} + \frac{1}{2}} \quad \text{ومنه} \quad U_n = \frac{1}{W_n + \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (3^{n+1}) = +\infty \quad (ب)$$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر.

تطبيق 23 **مجموع المتتاليات من الشكل** $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$ - النهاية و الحصر

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n} \quad \text{و} \quad U_0 = 1$$

(1) برهن بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \geq 0$

ثم بين أن $U_{n+1} - 3$ و $U_n - 3$ مختلفين في الإشارة

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

(ب) استنتج أنه إذا كانت (U_n) متقاربة فإن نهايتها 3

(3) استنتج أنه من أجل كل n يكون $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4} |U_n - 3|$ (نقبل أن $U_n \geq 2$)

(4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $|U_n - 3| \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

✓ الحل

(1) - من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 1$ والمتباينة $1 > 0$ صحيحة إذن p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي $n \geq 0$ أي $U_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} > 0$

بما أن $U_n > 0$ فإن $3U_n + 9 > 0$ و $2U_n > 0$

وبالتالي $U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n} > 0$ أي $U_{n+1} > 0$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن من أجل كل $n \geq 0$ لدينا $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{3U_n + 9}{2U_n} - 3 = \frac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \frac{3(3 - U_n)}{2U_n}$$

بما أن $2U_n > 0$ فإن $(U_{n+1} - 3)(3 - U_n) > 0$

وبالتالي نستنتج أن $U_n - 3$ و $U_{n+1} - 3$ مختلفين في الإشارة.

(2) نسمي p_n الخاصية " $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$ "

- من أجل $n=0$ يكون $U_0 = 1$ و $U_1 = 6$ و $1 \leq 3 \leq 6$ ومنه p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي $n \geq 0$ أي $U_{2n} \leq 3 \leq U_{2n+1}$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{2n+2} \leq 3 \leq U_{2n+3}$

• نبرهن أولا $U_{2n+2} \leq 3$

$$U_{2n+2} = \frac{3U_{2n+1} + 9}{2U_{2n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+1}}$$

$$\text{بما أن} \quad \frac{9}{2U_{2n+1}} \leq \frac{3}{2} \quad \text{فإن} \quad U_{2n+2} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \quad \text{أي} \quad U_{2n+2} \leq 3$$

• نبرهن ثانيا $U_{2n+3} \geq 3$

$$U_{2n+3} = \frac{3U_{2n+2} + 9}{2U_{2n+2}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{2U_{2n+2}}$$

$$\text{لدينا} \quad \frac{1}{2U_{2n+2}} \geq \frac{1}{6} \quad \text{ومنه} \quad U_{2n+3} \geq 3$$

تطبيق 24

الدوال المستمرة وحساب نهاية متتالية

(1) (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n$.

احسب U_1, U_2 .

(2) نرمز بـ f إلى الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ب) برهن أنه إذا كان $x \in [0, 3]$ فإن $f(x) \in [0, 3]$.

(3) استنتج من السؤال الثاني أن:

(أ) المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3.

(ب) المتتالية (U_n) متزايدة.

(4) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

✓ الحل

$$U_2 = -\frac{1}{3}U_1^2 + 2U_1 = \frac{671}{432} \quad , \quad U_1 = -\frac{1}{3}U_0^2 + 2U_0 = \frac{11}{12} \quad (1)$$

(2) (أ) f دالة قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

و من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = 3.$$

- إذا كان $x > 3$ فإن f' متناقصة تماما.

- إذا كان $x < 3$ فإن f' متزايدة تماما.

(ب) إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x) \geq 0$

لأن f دالة متزايدة تماما على $[0, 3]$ ومنه $3 \geq f(x) \geq 0$

إذن $f(x) \in [0, 3]$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
تغيرات f		↗ ↘	

(3) (أ) بما أن من أجل كل $x \in [0, 3]$ فإن

$f(x) \in [0, 3]$ فإننا نستطيع تعريف

المتتالية (U_n) بـ $U_{n+1} = f(U_n)$

- (U_n) محدودة من الأعلى بـ 3

هذا معناه أنه من أجل كل عدد طبيعي

$n \geq 0$ يكون $U_n \leq 3$

بالضرب في 9 نجد $\frac{9}{2U_{2n+2}} \geq \frac{3}{2}$

وبإضافة $\frac{3}{2}$ إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{2n+3} \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$

أي $U_{2n+3} \geq 3$ ومنه p_{n+1} صحيحة

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) إذا كانت (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

وبالتالي $3 \leq \ell \leq 3$ ومنه نجد $\ell = 3$

$$|U_{n+1} - 3| = \frac{3|U_n - 3|}{2U_n} \quad \text{وبالتالي} \quad |U_{n+1} - 3| = \frac{3(3 - U_n)}{2U_n} \quad (3)$$

بما أن $U_n \geq 2$ فإن $2U_n \geq 4$ ومنه $\frac{3}{2U_n} \leq \frac{3}{4}$

وبالضرب في $|U_n - 3|$ نجد $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4}|U_n - 3|$

أي $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{3}{4}|U_n - 3|$

(4) (أ) نسمي p_n الخاصية " $|U_n - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ "

p_0 صحيحة لأن $|U_0 - 3| = |2 - 3| = 1 \leq 2$ و $2 \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

نفرض أن p_n صحيحة أي $|U_n - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $|U_{n+1} - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

بضرب طرفي المتباينة $|U_n - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ في $\frac{3}{4}$ نجد $\frac{3}{4}|U_n - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$|U_{n+1} - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \quad \text{أي} \quad |U_{n+1} - 3| \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة.

إذن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - 3| = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$

إذن المتتالية (U_n) متقاربة نحو 3.

نبرهن على هذه المتباينة بالتراجع.

نسمي الخاصية $U_n \leq 3$

ومن أجل $n=0$ يكون $U_0 = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} \leq 3$

ومنه p_0 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $U_n \leq 3$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+1} \leq 3$.

بما أن $0 \leq U_n \leq 3$ فرضاً و f متزايدة تماماً على المجال $[0, 3]$

فإن $0 \leq f(U_n) \leq 3$ أي $U_{n+1} \leq 3$

إذن p_{n+1} صحيحة.

وعليه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

$$(ب) \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{3}U_n^2 + 2U_n - U_n$$

$$= -\frac{1}{3}U_n(U_n - 3)$$

بما أن $U_n \leq 3$ فإن $U_n - 3 \leq 0$ وبالتالي $-\frac{1}{3}U_n(U_n - 3) \geq 0$

أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة.

(4) بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

- حساب ℓ

بما أن f دالة مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة عند ℓ

وعليه ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$.

$f(x) = x$ يكافئ $(x=3)$ أو $(x=0)$

$\ell = 0$ مرفوض لأن الحد الأول للمتتالية هو $\frac{1}{2}$ والمتتالية متزايدة إذن $\ell = 3$.

تطبيق 25

الدوال المستمرة وحساب نهايات

(U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$

(1) برهن بالتراجع أن (U_n) متزايدة.

(ب) استنتج أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2. هل للمتتالية (U_n) متقاربة؟

(3) أوجد نهاية للمتتالية (U_n) .

✓ الحل

(1) (أ) (U_n) متزايدة يعني من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ يكون $U_{n+1} - U_n \geq 0$

نسمي الخاصية $U_{n+1} - U_n \geq 0$

- من أجل $n=0$ يكون $U_1 - U_0 = \sqrt{3} - 1 > 0$ و $\sqrt{3} - 1 > 0$

ومنه p_0 صحيحة.

- نفرض أن p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$.

المتباينة $U_{n+1} - U_n \geq 0$ تعني $U_{n+1} \geq U_n$

بإضافة 2 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $U_{n+1} + 2 \geq U_n + 2$

بجذر الطرفين نجد $\sqrt{U_{n+1} + 2} \geq \sqrt{U_n + 2}$

أي $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

ومنه $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$ إذن p_{n+1} صحيحة.

ومنه p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

$$(ب) \quad U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} = \frac{-(U_n - 2)(U_n + 1)}{U_n + \sqrt{2 + U_n}}$$

- بما أن $U_n + \sqrt{2 + U_n} > 0$ و $U_n + 1 > 0$ و $U_{n+1} - U_n \geq 0$ فإن $-(U_n - 2) \geq 0$

ومنه نستنتج $U_n \leq 2$ وهذا يعني أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2

- بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(2) بما أن (U_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

- بما أن الدالة $f: x \mapsto \sqrt{2+x}$ مستمرة عند العدد الحقيقي ℓ فإن ℓ حل للمعادلة

$$x = f(x)$$

$$x = f(x) \text{ يكافئ } x^2 - x - 2 = 0 \text{ يكافئ } x = 2 \text{ أو } x = -1$$

بما أن حدود المتتالية موجبة فإن $\ell = 2$.

تمارين و مسائل



1- المتتالية (U_n) معرفة من أجل $n \geq 3$ بـ $U_n = \frac{4n+2}{n-2}$ لها نهاية عند 4 .
أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in]3.99, 4.01[$

2- المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_n = n^2 - n$ لها نهاية $+\infty$.
أوجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $U_n \in]10^8, +\infty[$

3- المتتالية معرفة بـ $U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}$.
أحسب U_n من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

4- المتتالية معرفة من أجل كل n بالعبارة $U_n = \frac{1}{n!}$.
1) أحسب $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$.
2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $0 < U_n \leq \frac{1}{n}$.
3) استنتج نهاية (U_n) .

5- المتتالية معرفة بـ $U_n = n+1 - \sin n$.
بين من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n \leq U_n \leq n+2$ ثم استنتج نهاية (U_n) .

6- المتتالية معرفة بـ $U_n = \frac{n!}{n!}$ من أجل كل $n \geq 1$.
1) أحسب الحدود السبعة الأولى .
2) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 5$ يكون $1 \geq (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.
ب) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

7- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :

(أ) $U_n = \frac{-n+5}{2n+1}$ (ب) $U_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ (ج) $U_n = -n^2 + \frac{3}{2n+2}$
(د) $U_n = \frac{6n^2-3n+9}{n^2+n+3}$ (و) $U_n = \frac{7n+5}{2n^2+3}$ (ي) $U_n = \frac{6n^2+2}{7n+3}$

8- ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية المتتالية (U_n) :

(أ) $U_n = \sqrt{\frac{3}{2n+1}}$ (ب) $\sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$ (ج) $U_n = 1 - \frac{3}{n!}$
(د) $U_n = \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$ (و) $U_n = \sqrt{2n^4+n^3} - \sqrt{2n^4}$ (ي) $U_n = \frac{5n-25n^2+1}{\sqrt{n^2+6}}$

9- أوجد نهاية كل متتالية من المتتاليات (U_n) , (V_n) , (W_n) , (I_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بالعبارات التالية :

$I_n = \frac{V_n-1}{W_n-1}$, $W_n = U_n - n + 2$, $V_n = \frac{U_n}{n+1}$, $U_n = \frac{n^2+2}{n+3}$

10- (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ :

$V_n = U_n - \frac{20}{3}$ و $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 5$ و $U_0 = 4$

1) ابرهن أن المتتالية (V_n) هندسية . ب) أحسب V_n ثم U_n بدلالة n .

2) نضع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

أحسب S_n و S'_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتاليتين (S_n) و (S'_n)

11- في كل حالة من الحالات التالية عين بيانا الجذور الأولى للمتتاليات المقترحة ثم ضمن اتجاه تغير و نهاية هذه المتتالية :

(أ) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n \end{cases}$ (ج) $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2 \end{cases}$

12- ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $U_n = 2n^2 - 3n + 4$ (ب) $U_n = \frac{n^3+2n}{n^2+n}$ (ج) $U_n = 5(0.3)^n$

$$U_n = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) \times (0.2)^n \quad \text{و} \quad U_n = \frac{5^n}{7^n} \quad (د)$$

$$U_n = \frac{1}{n^2 - 5n + 6} \quad n \geq 4 \quad \text{متتالية معرفة من أجل كل} \quad (13)$$

بين أن (U_n) محدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{2}$
(يمكنك الاستعانة بدراسة الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 6$.)

14 - في كل حالة من الحالات التالية هل المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ؟ من الأسفل ؟ محدودة ؟

$$(1) \quad U_n = \cos n, \quad (ب) \quad U_n = 3 - \frac{1}{n}, \quad (ج) \quad U_n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$(د) \quad U_n = \sqrt{5n+3}, \quad (و) \quad U_n = n+2+\cos n$$

15 - ادرس تقارب أو تباعد كل متتالية من المتتاليات التالية باستعمال نظريات الحصر :

$$(1) \quad U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sin(3n), \quad (ب) \quad U_n = \frac{n+1}{3+\cos 2n}$$

$$(ج) \quad U_n = \frac{n-\sin n}{n^2+3}, \quad (د) \quad U_n = \frac{2^n+1}{3^{n+2}-1}$$

$$(16) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بالعلاقة } U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

(1) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.

$$(2) \quad (1) \text{ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \geq 1 \text{ لدينا } U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(ب) ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (U_n) ؟

$$(17) \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نضع } U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

(1) أوجد العددين الحقيقيين A و B بحيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$U_n = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$$

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

عين عبارة S_n بدلالة n ثم أوجد نهاية المتتالية (S_n) .

18 - ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad U_n = \frac{n!}{2^n - 1}, \quad (ب) \quad U_n = \frac{n!}{4^n}, \quad (ج) \quad U_n = \frac{2^n + 3}{4^n}$$

$$(19) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } \begin{cases} U_0 = 2 \\ 4U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$$

(1) عين الستة الحدود الأولى و عين القيمة ℓ التي تقرب منها هذه الحدود.

(2) لتكن (V_n) متتالية معرفة بـ $V_n = U_n - \ell$ برهن أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

20 - اجب بنعم أو لا عن كل سؤال من الأسئلة الطروحة مبرر الإجابة.

لتكن (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 ينتمي إلى مجال $]1+\infty[$ و العلاقة

$$U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

(1) (U_n) رتيبة

(2) (U_n) محدودة من الأسفل بالواحد.

(3) إذا كان $U_0 \in]1, 2[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 1.

(4) إذا كان $U_0 \in]2, +\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

(5) إذا كان $U_0 \in]2, +\infty[$ فإن (U_n) متقاربة نحو 2.

$$(21) \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = U_n - \frac{1}{3}(U_n)^3$$

(1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n \in [0, 1]$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$(22) \quad \text{لتكن المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n^2}$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_{n+1} < \frac{U_n}{2}$ ثم استنتج أن $U_n < \frac{U_0}{2^n}$

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$(23) \quad \text{لتكن } (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ}$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

- (1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
 (2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

- (24) - (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
 (1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{n}} \geq U_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$
 (2) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟
 (3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بالعبارة :

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{\sqrt{n}}$$
 ما هي نهاية (V_n) ؟

- (25) - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n + 1)$
 (1) برهن أن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل n بـ $V_n = 2 - U_n$ هندسية.
 (2) استنتج عبارة U_n بدلالة n ثم نهاية (U_n) .

- (26) - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1$ و $V_n = U_n + 3$
 (1) برهن أن (V_n) هندسية.
 (2) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (U_n) .
 (3) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية (S_n) .

- (27) - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3}$ و (V_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $V_n = U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي.
 (1) أوجد α بحيث (V_n) هندسية.
 (2) هل (V_n) متقاربة.
 (3) عبر عن V_n بدلالة n ثم أحسب $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ثم استنتج قيمة $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

- (28) - ندرس عدد البكتيريا النسبية لرض التفويد في لتر واحد من ماء يحتوي في البداية على 300 بكتيريا. لاحظنا أنه في كل دقيقة يزداد عدد البكتيريا بالعامل 1.0372 مع العلم أنه في كل دقيقة تموت بكتيريا واحدة.

- (1) إذا رمزنا بـ U_n إلى عدد البكتيريا الحية حتى الدقيقة n اكتب U_{n+1} بدلالة n
 (2) نضع $V_n = U_n - \frac{1}{0.037}$
 (أ) بين أن (V_n) هندسية ثم أحسب حدها العام بدلالة n .
 (ب) ما هو عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.
 (3) نريد تحسين هذه الدراسة بحيث ولا بكتيريا تموت خلال التجربة ولتكن W_n عدد البكتيريا الموجودة خلال n دقيقة.
 عبر عن W_n بدلالة n ثم أحسب عدد البكتيريا الحية خلال 30 دقيقة.
 كم عدد البكتيريا التي تم انقاضها ؟

- (29) - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$$

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+2}$$
 هل المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

- (30) - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}^* بـ $U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$
 و $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$
 (1) بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.
 (2) أحسب U_7 و V_7 ثم استنتج قيمة مقربة للنهائية المشتركة ℓ .
 (3) بين أن ℓ ليس عددا ناطقا. (استعمل البرهان بالخلف)
 ثم تحقق من أن $U_6 < \ell < V_6$

- (31) - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $U_0 = -1$ و $V_0 = 2$.

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \text{ و } V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5}$$

 (1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم أن $U_n < V_n$
 (ب) برهن أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.
 (2) أوجد العددين الحقيقيين المختلفين a و b
 بحيث أن المتتاليتين (S_n) و (t_n) العرفتين على \mathbb{N} بـ :
 $S_n = U_n + aV_n$ و $t_n = U_n + bV_n$ هندسيتان (ثابتتان).
 (3) عبر عن S_n و t_n بدلالة n .
 (ب) أحسب نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n) .

32 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = -3$ و $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

(1) مثل بياننا الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$

(ب) استعمل المنحنى البياني للدالة f لتخمين طبيعة المتتالية (U_n) .

(2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n < 1$

(3) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة

(4) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $V_n = 1 - U_n$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $V_{n+1} < \frac{1}{7} V_n$ ثم استنتج نهاية (V_n)

(5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟

(ب) أوجد العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n > n_0$ يكون $U_n > 0.99$

33 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـ $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5}{2U_n}$ و $V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}$

(1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ يكون $V_{n+1} = V_n^2$

(ب) استنتج أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $V_n = (V_0)^{2^n}$

(2) احسب V_0 ثم برهن أن $|V_0| \leq \frac{1}{16}$

(ب) عين نهاية المتتالية (V_n) ، (ج) استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

34 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_1 = \frac{3}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{2}{U_n} \right)$

(1) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n > 0$

(2) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{(U_n - \sqrt{2})^2}{U_n}$

ثم استنتج أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_n > \sqrt{2}$

(3) برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (U_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{U_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$

(4) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

35 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}$

(1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3

(2) برهن أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 ماذا تستنتج ؟
(3) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟ (لحساب النهاية استعن بالدالة $\sqrt{x+6}$ في x)

36 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 > \frac{-5}{4}$ و $U_{n+1} = \sqrt{5 + 4U_n}$

(1) ارسم (C_f) بيان الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{5 + 4x}$ ثم عين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$

(2) نفرض في هذا السؤال أن $U_0 = 6$

(أ) برهن أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل.

(ب) ادرس تغيرات المتتالية (U_n) ثم استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب نهايتها.

(3) برهن أن النتائج المحصل عليها سابقا (في السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 > 5$

(ب) هل نتائج (السؤال 2) تبقى صحيحة في حالة $U_0 < 0$ ؟

(ج) ماذا تصيح المتتالية في حالة $U_0 = 5$ ؟

37 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $U_n > 0$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $2 \geq U_n \geq \frac{3}{2}$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

برهن أنه من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ومن أجل كل $y \geq \frac{3}{2}$ يكون

(1) $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9} |x - y|$

(3) (أ) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فما هي قيمة نهايتها ℓ ؟

(ب) برهن باستعمال (1) أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $|U_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |U_n - \ell|$

(ج) استنتج بالتراجع أن $|U_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |U_1 - \ell|$

(د) برهن عندها أن (U_n) متقاربة نحو ℓ .

38 - (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ

$U_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$

7 الدرس

الدوال الأصلية وحساب التكاملات

1 - مفهوم التكامل على مجال

1-1 تكامل دالة درجية

نقول أن f دالة درجية على المجال $[a, b]$ عندما نستطيع إيجاد تقسيم J $[a, b]$ مشكل من الأعداد الحقيقية $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ بحيث $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ و بحيث الدالة f ثابتة على كل مجال من الشكل $[x_{i-1}, x_i]$ حيث $n \geq i \geq 1$.

حالة دالة ثابتة على $[a, b]$

f دالة معرفة على مجال $[a, b]$ بحيث من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا $f(x) = c$.
القيمتان $f(a)$ و $f(b)$ يمكن أن تكونا مختلفتين عن العدد c .
بالتعريف تكامل الدالة f على المجال $[a, b]$ هو العدد الحقيقي $I(f)$ بحيث $I(f) = (b-a) \times c$

$$V_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

(1) بين أن المتتالية (V_n) متقاربة نحو $\frac{1}{2}$.

(2) بين أن كل من الدوال $f: x \mapsto x - \sin x$

$$h: x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x, \quad g: x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

تأخذ قيم موجبة أو معدومة على المجال $[0, +\infty)$. (استعمل تغيرات كل دالة)

(ب) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $n^3 \leq n^4 + 2^3 + \dots + 1^3$

ثم استنتج من (1) أن $V_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq U_n \leq V_n$ من أجل كل $n \geq 0$

(ج) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

$$(U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ } U_0 = 2 \text{ و } U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}} + 1$$

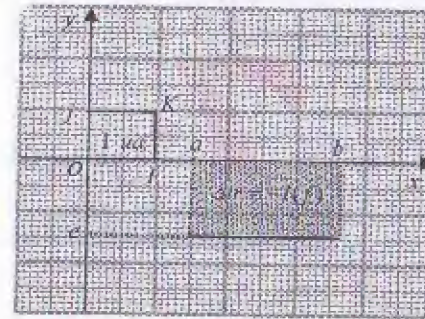
(1) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 0$ يكون $U_n \geq 1$

ثم برهن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

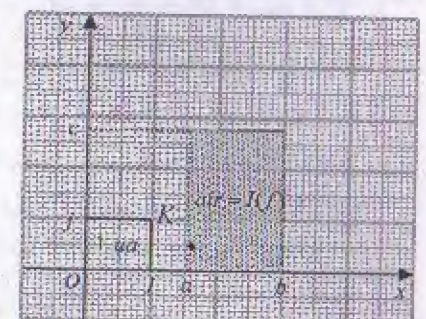
(3) برر تقارب المتتالية (U_n) .

(4) احسب الخمسة الحدود الأولى (قيم دقيقة) ما هو التخمين فيما يخص عبارة U_n ؟

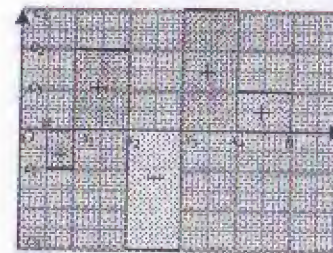
(5) ما هي نهاية المتتالية (U_n) ؟



لا $c < 0$ تكامل الدالة f هو عكس مساحة المستطيل $OIKJ$



لا $c > 0$ تكامل الدالة f هو مساحة المستطيل $OIKJ$



حالة دالة درجية على المجال $[a, b]$

إذا كان من أجل كل x من x_{i-1}, x_i لدينا $f(x) = c_i$ فإن تكامل f على $[a, b]$ هو العدد $I(f)$ يعرف بـ

$$I(f) = (x_1 - x_0)c_1 + (x_2 - x_1)c_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})c_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i$$

التكامل $I(f)$ على المجال $[a, b]$

نرمز له بـ $\int_a^b f(t) dt$ والذي يقرأ تكامل من a إلى b تفاضل t .

ملاحظة

بما أن التغير t أيكم نستطيع استبداله بأي متغير آخر وعليه

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$$



مثال -

دالة درجية معرفة على المجال $[-2, 3]$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & , 0 \geq x \geq -2 \\ -3 & , 1 \geq x \geq 0 \\ 1 & , 3 \geq x > 1 \end{cases}$$

(y_R) منحناها في معلم متعامد و متجانس

لنحسب $I(g)$

$$I(g) = (0+2) \times 2 + (1-0) \times (-3) + (3-1) \times 1$$

$$= +4 - 3 + 3 = 4$$

2-1 تكامل دالة مستمرة

حصر مساحة

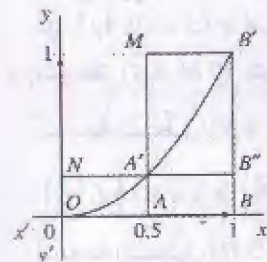
مثال -

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, 1]$ بـ $f(x) = x^2$ و (y) قوسا من القطع

الكافئ (p) المثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$

نريد تعيين حصر لمساحة حيز من المستوى تحت المنحنى المثل للدالة f المحدد بالقوس (y)

و محور الفواصل (x, x') و المستقيم ذي المعادلة $x=1$ و لتكن A



(1) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى مجالين لهما نفس الطول 0,5

على المجال $[0, 0,5]$ المساحة التي تبحث عنها محصورة بين 0 و مساحة المستطيل $AONA'$ و على المجال $[0,5, 1]$

المساحة التي تبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $ABB'A'$ و $ABB''M$

اعط حصرا للمساحة A على المجال $[0, 1]$

(2) نقوم بتقسيم المجال $[0, 1]$ إلى ثلاثة

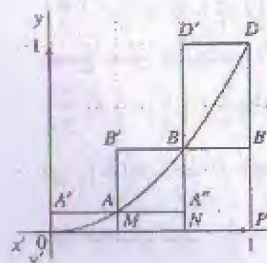
مجالات طول كل منها $\frac{1}{3}$ و عليه

فالمساحة التي تبحث عنها محصورة بين مساحتي المستطيلين $BB''NM$ و $AA'NM$

على المجال $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

اعط حصرا للمساحة A ثم قارنه

مع الحصر الحاصل عليه في السؤال 1



(3) نقسم المجال $[0, 1]$ إلى n مجال وطول كل منها $\frac{1}{n}$

و لنعتبر المجال $I = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ مع k عدد طبيعي محصور بين 0 و $n-1$.

(أ) اعط حصرا لمساحة حيز من المستوى تحت المنحنى للمثل للدالة f على I بدلالة n و k .

(ب) اعط حصرا للمساحة A مبينا ان A محصورة بين متتاليتين (U_n) و (V_n) بحيث $V_n \geq A \geq U_n$ اوجد عبارتهما.

(يعطى $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ماذا تستنتج بالنسبة إلى A ؟

✓ الحل

(1) مساحة $(AOA'N)$ تساوي $0.5 \times f(0.5)$ ومنه ،

$$0.5 \times f(0.5) \geq A_0 \geq 0$$

مساحة $(ABB'M)$ تساوي $0.5 \times f(1)$ ومنه ،

$$0.5 \times f(1) \geq A_1 \geq 0.5 \times f(0.5)$$

بجمع طريقي (1) و (2) نجد $0.5(f(0.5) + f(1)) \geq A_0 + A_1 \geq 0.5 \times f(0.5)$ أي $0.625 \geq A \geq 0.125$ بالحساب نجد $0.5(0.5^2 + 1^2) \geq A \geq 0.5 \times (0.5)^2$.

(2) مساحة $(OMAA')$ تساوي $\frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3})$ ومنه $\frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3}) \geq A_0 \geq 0$ ومنه $\frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3}) \geq A_1 \geq 0$... (1)

مساحة المستطيل $(MNB'B')$ تساوي $\frac{2}{3} \times f(\frac{2}{3})$ ومنه ،

$$\frac{2}{3} \times f(\frac{2}{3}) \geq A_1 \geq \frac{1}{3} \times f(\frac{1}{3})$$

مساحة المستطيل $(NPDD')$ تساوي $f(1)$ ومنه ،

$$f(1) \geq A_2 \geq \frac{2}{3} \times f(\frac{2}{3})$$

بجمع حدود المتباينات (1) و (2) و (3) نجد ،

$$\frac{1}{3} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3} f(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3} f(1) \geq A_0 + A_1 + A_2 \geq \frac{1}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3} f(\frac{2}{3})$$

$$f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(1) \geq A \geq \frac{1}{3} [f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})]$$

بعد الحساب نجد $\frac{14}{33} \geq A \geq \frac{5}{33}$ أي $0.42 \geq A \geq 0.15$

من السؤالين (1) و (2) نلاحظ أن التقسيم الثاني اعطى لنا حصرا افضل من الحصر الحاصل عليه في السؤال (1) و عليه كلما كانت التقسيمات كثيرة كان حصر المساحة أدق.

(3) (أ) نرمز ب A_k إلى مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى للمثل للدالة f على المجال I ، هذه المساحة محصورة بين مساحة المستطيلين $F_1 F_1' F_2 F_2'$ و $F_2 F_2' F_3 F_3'$.

مساحة $(F_1 F_1' F_2 F_2')$ تساوي $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$

مساحة $(F_2 F_2' F_3 F_3')$ تساوي $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

إذن $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \geq A_k \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

نضع $h_n(t) = f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ و $g_n(t) = f\left(\frac{k}{n}\right)$

مع k ينتمي إلى $\{0, 1, \dots, n-1\}$ و $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$

(ب) $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \geq A_0 \geq \frac{1}{n} f(0)$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \geq A_1 \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

⋮

$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \geq A_{n-1} \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع حدود المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد ،

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \geq A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1} \geq \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

وبما أن $A = A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1}$ فإنه نستنتج :

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right] \geq A \geq \frac{1}{n} \left[\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right]$$

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \geq A \geq \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2]$$

بوضع $V_n = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$ و $U_n = \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2]$

تصبح المتباينة السابقة كما يلي $V_n \geq A \geq U_n$

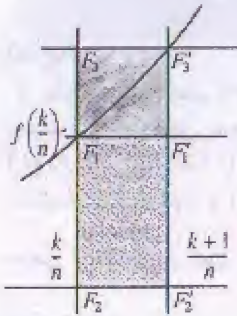
$$V_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ و } U_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

U_n هي مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى للدالة الترجية g_n و لتكن $I(g_n)$

V_n هي مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى للدالة الترجية h_n و لتكن $I(h_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ (ج)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{3} \text{ و } V_n \geq \mathcal{A} \geq U_n$$

فإن حسب نظرية الحصر نستنتج $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

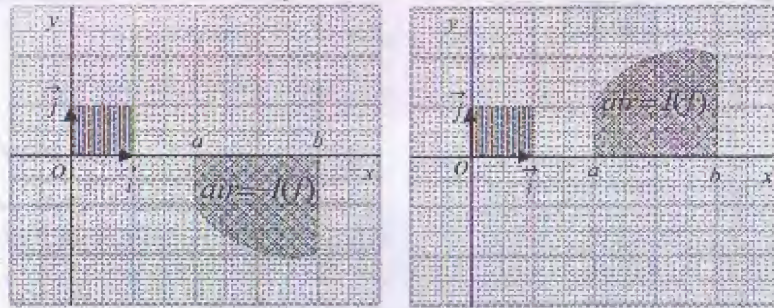
يمكننا التأكد من أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان و عليه فالمتتاليتان (U_n) و (V_n) متقاربتين نحو نفس النهاية $\ell = \frac{1}{3}$ ، نقول أن هذه النهاية المشتركة ℓ هي تكامل f على المجال $[0, 1]$ و نرمز له بـ $\int_0^1 f(t) dt$ و نكتب $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$

تعريف

f دالة مستمرة على $[a, b]$ ، نتقبل أنه توجد متتاليتين لدايتين درجيتين (g_n) و (h_n) بحيث من أجل كل n من \mathbb{N}^* و من أجل t من $[a, b]$ $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ (1)
المتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ ... (2)
نسمي ℓ تكامل f على $[a, b]$ و نكتب $\int_a^b f(t) dt$

ملاحظة

- إذا كانت (g_n) و (h_n) متتاليتين لدايتين درجيتين لهما نفس خصائص (g_n) و (h_n) فإن ℓ هي كذلك نهاية $I(g_n)$ و $I(h_n)$.
- تجاور المتتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متعلق بطريقة تقسيم المجال $[a, b]$.
- إذا قسمنا المجال $[a, b]$ إلى 2^n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{2^n}$ نتحصل دائماً على متتاليتين $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ متجاورتين و هذا مهما كانت طبيعة f .
(f رتيبة أو غير رتيبة، موجبة أو سالبة).
- إذا قسمنا المجال $[a, b]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{b-a}{n}$ فالمتتاليتان $(I(g_n))$ و $(I(h_n))$ الحاصل عليهما متقاربتان نحو $\int_a^b f(t) dt$ لكن حتى ولو كانت f رتيبة على $[a, b]$ لسنا متأكدين من تجاور هاتين المتتاليتين.
- إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة فإن العدد $I(f)$ موجب و يعبر عن مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى الممثل للدالة f .
- إذا كانت f مستمرة و سالبة فإن العدد $I(f)$ يعبر عن نظير مساحة حيز من المستوى تحت المنحنى الممثل للدالة f .



تمرين تدريبي 1

لتكن f دالة معرفة بـ $f(x) = 2x - 1$.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt \quad , \quad J = \int_{\frac{1}{2}}^2 f(t) dt$$

✓ الحل

الدالة f ممثلة بالاستقيم (d) الذي يقطع محور الفواصل في النقطة $A(\frac{1}{2}, 0)$ ولتكن $B(2, 0)$ من محور الفواصل لتكن E نقطة من (d) فاصلتها 2 و ترتيبها 3.
 (d) يقطع محور الترتيب في $C(0, -1)$
- على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$ الدالة f موجبة

ومنه J هو مساحة المثلث ABE والتي تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة المساحات وبالتالي $J = \frac{9}{4}$.

- على المجال $[0, \frac{1}{2}]$ الدالة f سالبة ومنه I نظير مساحة المثلث OCA التي هي $\frac{1}{4}$ ومنه $I = -\frac{1}{4}$.

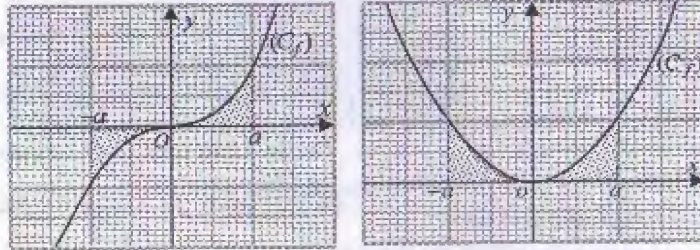
تمرين تدريبي 2

$$f \text{ دالة معرفة على المجال } [0, 4] \text{ بـ } \begin{cases} f(x) = x & , x \in [0, 1] \\ f(x) = 1 & , x \in [1, 2] \\ f(x) = -x + 3 & , x \in [2, 4] \end{cases}$$

نتيجة

(1) إذا كانت f زوجية على $[-a, a]$ فإن $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$

(2) إذا كان f فردية على $[-a, a]$ فإن $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$



الإثبات

حسب علاقة شال لدينا $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$

(1) إذا كانت f زوجية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad \text{ومنه} \quad \int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$$

(2) إذا كانت f فردية فإن الحيزين الملونين لهما نفس المساحة وعليه :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$$

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad \text{ومنه}$$

مثال 1

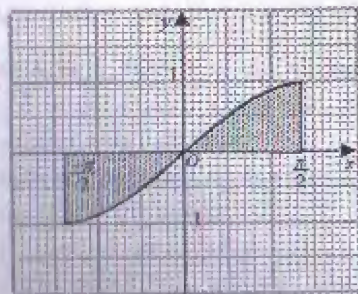
$f(x) = \sin x$ دالة معرفة على \mathbb{R} بـ

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \quad \text{احسب التكامل}$$

الحل

الدالة f فردية على المجال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{ومنه} \quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 0$$



احسب التكاملين I و J التاليين $I = \int_0^3 f(t) dt$ ، $J = \int_3^1 f(t) dt$

ثم احسب $I+J$

✓ الحل

- على المجال $[0, 3]$ الدالة f موجبة
ومنه I هو مساحة شبه المنحرف $OABC$

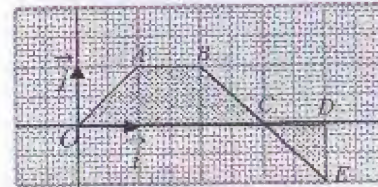
والتي تساوي $\frac{(3+1) \times 1}{2}$ أي 2

ومنه $I = 2$ وحدة المساحات

- على المجال $[3, 4]$ الدالة f سالبة

ومنه J هو نظير مساحة المثلث CED التي تساوي $\frac{1}{2}$ ومنه $J = -\frac{1}{2}$

$$\text{إذن} \quad I+J = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



2 - خواص التكامل

مبرهنة

كل دالة مستمرة على مجال $[a, b]$ تقبل تكاملا على هذا المجال.

2 - 1 تمديد تعريف التكامل إلى a و b كيفيين

عرفنا تكامل دالة درجبة أو مستمرة على مجال $[a, b]$ مع $a < b$ والآن إذا كانت f دالة

مستمرة على مجال I ، و كان a و b عددين من I بحيث $a \geq b$

نضع التعريف التالي :

$$\text{لما} \quad a > b \quad \text{تكون} \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt \quad \text{ولما} \quad a = b \quad \text{تكون} \quad \int_a^a f(t) dt = 0$$

2 - 2 علاقة شال

مبرهنة

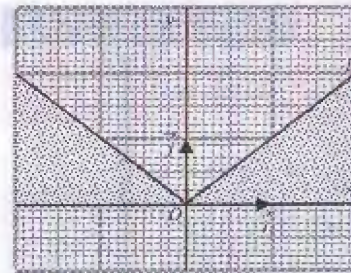
f دالة مستمرة على I . مهما تكن الأعداد

الحقيقية a, b, c من I

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$



مثال 2



f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = |x|$
احسب التكامل $I = \int_{-2}^2 f(t) dt$

✓ الحل

الدالة f زوجية على المجال $[-2, 2]$

ومنه $I = \int_{-2}^2 f(t) dt = 2 \int_0^2 f(t) dt$

وبما أن f موجبة على المجال $[0, 2]$

فإن $\int_0^2 f(t) dt$ تساوي مساحة المثلث OAB التي هي 2 وحدة المساحات

وعليه $I = 2 \int_0^2 f(t) dt = 2 \times 2 = 4$

3-2 خطية التكامل

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I و λ عدد حقيقي كفي.

مهما يكن العددين الحقيقيان a و b من I لدينا

$$\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \quad \text{و} \quad \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

الإثبات

نثبت المساواة $\lambda I(f) = I(\lambda f)$ أي $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

(1) نفرض أن الدالة f درجبة على المجال $[a, b]$ إذن يوجد تقسيم J مع $x_0 = a$

و $x_n = b$ ويحيث من أجل كل x من $[x_{i-1}, x_i]$ $f(x) = c_i$ مع $n \geq i \geq 1$

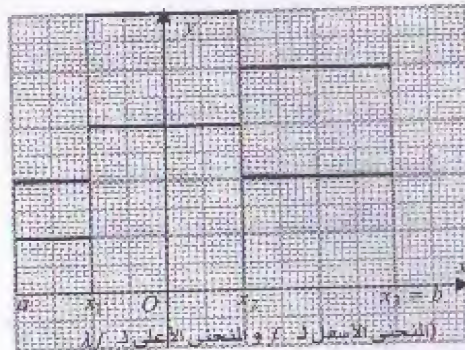
عندئذ من أجل كل x من $[x_{i-1}, x_i]$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda c_i$ وعليه λf

ثابتة على كل مجال من هذه المجالات

إذن فالدالة λf درجبة.

$$I(\lambda f) = \lambda c_1 (x_1 - x_0) + \dots + \lambda c_n (x_n - x_{n-1})$$

$$= \lambda [c_1 (x_1 - x_0) + \dots + c_n (x_n - x_{n-1})] = \lambda I(f)$$



(2) نفرض أن f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$

عندئذ من أجل كل n من \mathbb{N}^* توجد

دالتان درجبتان g_n و h_n بحيث من

أجل كل t من $[a, b]$

يكون $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$

و $I(f)$ النهاية المشتركة للمتتاليتين

$(I(g_n))$ و $(I(h_n))$.

- و $\lambda \geq 0$ فإنه من أجل كل t من

$[a, b]$ و كل n من \mathbb{N}^* يكون:

$$\lambda h_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda g_n(t)$$

لنبين أن المتتاليتين $(I(\lambda h_n))$ و $(I(\lambda g_n))$ متقاربتان نحو نفس النهاية

بالتعريف تكون $I(\lambda f)$ هي النهاية المشتركة.

بما أن المتتالية $(I(g_n))$ متقاربة نحو $I(f)$ فإن المتتالية $(\lambda I(g_n))$ متقاربة

نحو $\lambda I(f)$. وبما أن دالتان درجبتان فإن $I(\lambda g_n) = \lambda I(g_n)$ من أجل

كل $n \geq 1$

وبالتالي $(I(\lambda g_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$.

بنفس الكيفية نبين أن $(I(\lambda h_n))$ متقاربة نحو $\lambda I(f)$

إذن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

- يضرب المتباينة $h_n(t) \geq f(t) \geq g_n(t)$ بالعدد $\lambda < 0$ نجد

$$\lambda g_n(t) \geq \lambda f(t) \geq \lambda h_n(t)$$

ونبرهن بنفس الكيفية السابقة أن $I(\lambda f) = \lambda I(f)$

و $a \geq b$ فإنه من التعريف:

$$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = - \int_b^a (\lambda f)(t) dt \quad \text{و} \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

$$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b (\lambda f)(t) dt = - \int_b^a (\lambda f)(t) dt = - \int_b^a \lambda f(t) dt = \lambda \int_b^a f(t) dt$$

$$I(\lambda f) = \lambda I(f)$$

◆ مثال -

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[2, 7]$ إذا علمت أن:

$$I = \int_2^7 f(x) dx = -5 \quad \text{و} \quad J = \int_7^3 f(x) dx = 3 \quad \text{و} \quad K = \int_2^7 g(x) dx = 13$$

(أ) احسب $L = \int_2^7 f(x) dx$ و $M = \int_2^7 (f+g)(x) dx$ و

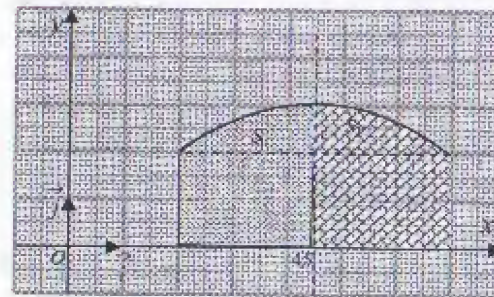
$N = \int_2^7 (4f(x) - 5g(x)) dx$

(ب) نفرض أن $g(x) > 0$ على المجال $[2, 7]$ و المنحني البياني لـ g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{9}{2}$. احسب $\int_2^{4.5} g(x) dx$.

✓ الحل

(أ) $L = \int_2^7 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx - \int_7^3 f(x) dx = I - J = -8$

$M = \int_2^7 (f+g)(x) dx = \int_2^7 f(x) dx + \int_2^7 g(x) dx = L + K = -8 + 13 = 5$



$N = \int_2^7 4f(x) dx - \int_2^7 5g(x) dx$

$= 4 \times L - 5K = -32 - 65 = -97$

(ب) $S_1 = \int_2^{4.5} g(x) dx$

$S_2 = \int_{4.5}^7 g(x) dx$

بما أن المنحني الممثل للدالة g متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $x = 4,5$

فإن $S_1 = S_2$ و $S_1 + S_2 = 13$ ومنه $S_1 = \frac{13}{2}$

4-2 إشارة التكامل و المقارنة

مبرهنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال I ، وليكن a و b عددين حقيقيين من I .

(1) إذا كان $a \leq b$ و $f \geq 0$ على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

(2) إذا كان $a \leq b$ و $f \geq g$ على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

الإثبات

(1) رأينا في ما سبق أنه إذا كانت f موجبة على $[a, b]$ فإن $I(f)$ يمثل المساحة و

بالتالي فهو موجب إذن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) من الفرض $f \geq g$ نستنتج أن $f - g \geq 0$ على المجال $[a, b]$ وعليه $I(f - g) \geq 0$ لكن $I(f - g) = I(f) - I(g)$.

إذن $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$

ومنه نستنتج $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

◆ مثال -

عين إشارة التكامل $I = \int_0^1 (x^2 - 1) dx$ و $J = \int_1^2 (x^2 - 1) dx$

✓ الحل

لتعيين إشارة I نعين إشارة الدالة f للفترة على $[0, 2]$ بـ $f(x) = x^2 - 1$

- إذا كان $x \in [0, 1]$ فإن $f(x) \leq 0$ إذن $\int_0^1 -f(x) dx \geq 0$ وحسب الخطية

$\int_0^1 f(x) dx \leq 0$ وعليه نستنتج $\int_0^1 -f(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx$

- إذا كان $x \in [1, 2]$ فإن $f(x) \geq 0$ ومنه $\int_1^2 f(x) dx \geq 0$.

5-2 القيمة المتوسطة لدالة - حصر القيمة المتوسطة

مبرهنة 1

f دالة مستمرة على مجال I ، وليكن a و b عددين حقيقيين مختلفين من I ، عندئذ

يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c)$.

العدد $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f بين a و b

نفرض أن الدالة f متزايدة.

الحالة الأولى $a < b$

بما أن f متزايدة فإنه من أجل كل x من $[a, b]$ فإن $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

ومنه نستنتج $f(b)(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq f(a)(b-a)$

وبما أن $b-a > 0$ نجد $f(b) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq f(a)$

بما أن f متزايدة ومستمرة على $[a, b]$

فإنه يوجد عدد حقيقي c من $[a, b]$

بحيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

الحالة الثانية $a > b$

لدينا في هذه الحالة $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

وبما أن $b < a$ فإنه يوجد c محصور بين a و b بحيث $\int_b^a f(x) dx = (a-b)f(c)$

ومنه $\int_a^b f(x) dx = -(a-b)f(c)$ أي $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$

مبرهنة 2

f دالة مستمرة على مجال I ، وليكن m و M عددين حقيقيين مختلفين، وليكن أيضا a و b عددين حقيقيين من I بحيث $a \leq b$

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ على المجال $[a, b]$ فإن $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

الإثبات

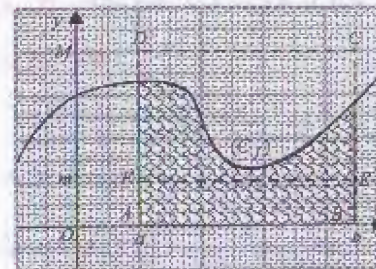
من أجل كل x من $[a, b]$ لدينا،

$m \leq f(x) \leq M$ (1)

الدالتان $x \mapsto m$ و $x \mapsto M$ ثابتتان على $[a, b]$

إذن $\int_a^b m dt = m(b-a)$ و $\int_a^b M dt = M(b-a)$

وبما أن $a \leq b$ و بتكامل المتباينة (1) نحصل على



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

بالقسمة على $(b-a)$ نجد $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$

نتيجة

f دالة مستمرة على مجال I وليكن a و b عددين حقيقيين من I وليكن M عدد حقيقي موجب.

إذا كانت $|f(x)| \leq M$ على $[a, b]$ أو $[b, a]$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a|$$

مبرهنة

(1) f دالة مستمرة و سالبة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b |f(x)| dx$

(2) إذا كانت f تتعدم عند c من $[a, b]$ و $f(x)$ سالبة على $[a, c]$ وموجبة على $[c, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b f(x) dx$$

الإثبات

(1) نضع $f(x) = -g(x)$ حيث $g(x)$ موجبة

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -g(x) dx = - \int_a^b g(x) dx = - \int_a^b |f(x)| dx$$

(لأن $g(x) = -f(x) = |f(x)|$)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = - \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

ملاحظة

(1) إذا كانت f سالبة على مجال I فإن تكامل f على I هو نظير مساحة حيز من المستوى فوق للنحني للمثل للدالة f

(2) إذا غيرت f إشارتها على I نجزئ المجال I إلى مجالات جزئية بحيث الدالة f لها إشارة ثابتة على كل منها ثم نجمع التكاملات المحسوبة على كل مجال.

تمرين تدريبي 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq 2 \quad (2) \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \text{بين أن}$$

✓ الحل

في الحالتين أن الدالتين المعطاة مستمרות على \mathbb{R} إذن فهما قابلتان للمكاملة على مجال التكامل.

(1) من أجل كل t من $[0, \frac{\pi}{2}]$ يكون $0 \leq \cos t \leq 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \quad \text{إذن} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{لكن} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq \frac{\pi}{2}$$

(2) بما أن $1 \geq x \geq 0$ فإن $0 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 2x \leq 2$ ومنه

$$0 \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 2x dx$$

$$\int_0^1 2x dx = 2(1-0) = 2 \quad \text{لكن} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx \leq 2 \quad \text{إذن}$$

تمرين تدريبي 2

f دالة معرفة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x-1$ و (d) تمثيله البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(أ) احسب التكامل $I = \int_0^2 f(x) dx$ ثم احسب القيمة المتوسطة لـ f على $[0, 2]$.

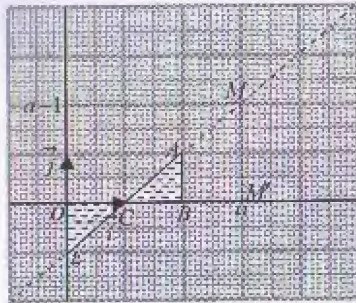
(ب) ليكن a عددا حقيقيا بحيث $2 < a$ و M نقطة من (d) ذات الفاصلة a .

احسب $S(a) = \int_2^a f(x) dx$ ثم قارن بين $f(a)$ و $S'(a)$.

✓ الحل

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - (0 - 0) = 0$$

الدوال الأصلية وحساب التكاملات



بما أن f سالبة على المجال $[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x) dx$$

هو نظير مساحة المثلث OEC التي تساوي $\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}$$

بما أن f موجبة على $[1, 2]$ فإن $\int_1^2 f(x) dx$

هي مساحة المثلث ACB والتي تساوي 1

$$\int_1^2 f(x) dx = 1 \quad \text{إذن} \quad \int_0^2 f(x) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0, 2]$ هي M حيث

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ب) بما أن f موجبة على $[2, a]$ فإن $\int_2^a f(x) dx$ يساوي مساحة شبه المنحرف $AMBM'$

$$\frac{a(a-2)}{2} \quad \text{التي تساوي} \quad \frac{[(a-1)+1](a-2)}{2}$$

$$\int_2^a f(x) dx = \frac{a(a-2)}{2} \quad \text{إذن} \quad S(a) = \int_2^a f(x) dx = \frac{a(a-2)}{2}$$

الدالة S قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $S'(a) = a-1 = f(a)$

3 - دوال أصلية لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $I = [a, b]$ يشمل α

مهما يكن العدد الحقيقي x من I ، فإن الدالة F المعرفة بـ $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

قابلة للاشتقاق على I ولدينا $F'(x) = f(x)$.

الإنشآت

نفرض أن f متزايدة تماما و موجبة على مجال $[a, b]$ وليكن α و $\alpha+h$ عددين حقيقيين من $[a, b]$.

$$\text{لدينا } F(\alpha+h) = \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(t) dt \text{ و } F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt$$

مساحة الحيز المشط هي ،

$$h < 0 \vee F(\alpha) - F(\alpha+h) \text{ و } h > 0 \vee F(\alpha+h) - F(\alpha)$$

$$\text{لدينا } h \times f(\alpha) \leq F(\alpha+h) - F(\alpha) \leq h \times f(\alpha+h)$$

$$\text{ومنه نستنتج } f(\alpha) \leq \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha+h) \text{ (في حالة } h \text{ موجبة)}$$

$$\text{و } f(\alpha+h) \leq \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} \leq f(\alpha) \text{ (في حالة } h \text{ سالبة)}$$

ويمان f مستمرة عند α

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha+h) = f(\alpha)$$

وحسب نظرية الحصر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$$

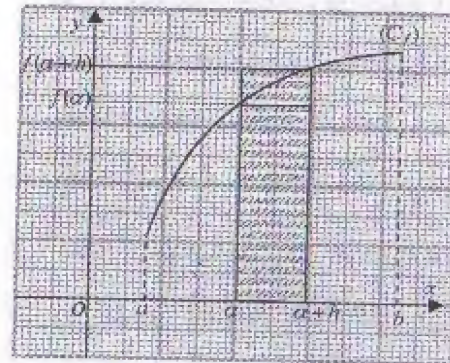
$$\text{لكن } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = F'(\alpha)$$

وعليه $F'(\alpha) = f(\alpha)$ من أجل

كل α من $[a, b]$.

بطريقة مماثلة نبين أن $F'(\alpha) = f(\alpha)$

في حالة f متناقصة تماما على I .



1-3 تعريف

كل دالة F قابلة للاشتقاق على مجال I وبحيث أنه من أجل كل x من I يكون

$$F'(x) = f(x) \text{ هي دالة أصلية لدالة } f \text{ على مجال } I$$

مثال .

(1) f و g دالتان معرفتان على $]0, +\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \ln x$$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ لدينا $g'(x) = f(x)$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$.

(2) f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $g(x) = \cos x$ و $f(x) = -\sin x$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $g'(x) = f(x)$

ومنه g أصلية لـ f على \mathbb{R} .

2-3 العلاقة بين دالتين أصليتين لدالة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I .

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن الدالة f تقبل ما لا نهاية من الدوال الأصلية. من الشكل $G(x) = F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي.

الإثبات

لدينا فرضاً F قابلة للاشتقاق على I و $F'(x) = f(x)$

- الدالة G قابلة للاشتقاق على I وبحيث $G' = F' = f$

إذن G دالة أصلية لـ f على I .

وبالعكس إذا كانت G دالة أصلية لـ f على I فإن $G' = f = F'$

وعليه $G' - F' = 0$ ومنه $G - F$ ثابتة

أي $G(x) - F(x) = k$ ومنه $G(x) = F(x) + k$.

مثال .

f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{3}x^3$

الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = x^2 = f(x)$

منه g دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} وبالتالي كل الدوال G المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي هي دوال أصلية لـ } f \text{ على } \mathbb{R}$$

3-3 الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معينة من أجل قيمة معلومة للمتغير

مبرهنة

x_0 عدد حقيقي من مجال I و y_0 عدد حقيقي كيفي

عندئذ توجد دالة أصلية وحيدة G لـ f على I بحيث $G(x_0) = y_0$.

الإثبات

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن كل دالة أصلية أخرى G لـ f تكتب على الشكل

$$G(x) = F(x) + k \text{ مع } k \text{ عدد حقيقي ولكون } G(x_0) = y_0 \text{ نجد } F(x_0) + k = y_0$$

$$\text{ومنه } k = y_0 - F(x_0)$$

إذن k وحيد وبالتالي توجد دالة أصلية وحيدة تحقق الشرط $G(x_0) = y_0$.

مثال .

$$f(x) = x^2 \text{ و } g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

الدوال الأصلية للدالة f هي من الشكل $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ مع k عدد حقيقي
و الآن نبحث عن الدالة الأصلية التي تحقق $G(1) = 2$.
 $G(1) = 2$ تكافئ $\frac{1}{3} \times 1^3 + k = 2$ تكافئ $k = \frac{5}{3}$
إذن الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $G(1) = 2$ هي $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}$

3-4 الدالة الأصلية لدالة مستمرة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I
عندئذ فالدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ المعرفة على I هي الدالة الأصلية الوحيدة لـ f على I
بحيث $F(a) = 0$

تمرين تدريبي 1

F دالة معرفة بـ $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt$

(أ) عين مجموعة تعريف الدالة F .
(ب) احسب $F'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة F ثم عين إشارتها.

✓ الحل

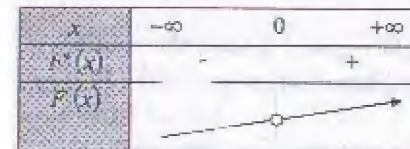
(أ) الدالة $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R}
إذن الدالة F معرفة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وبالتالي $D_F = \mathbb{R}$.

(ب) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $F'(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

وبما أن $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}
فإن $F'(x) > 0$
وبالتالي F متزايدة تماما على \mathbb{R}

و $F(0) = \int_0^0 e^{-\frac{t}{2}} dt = 0$

وعليه إذا كان $x > 0$ فإن $F(x) > 0$
وإذا كان $x < 0$ فإن $F(x) < 0$



تمرين تدريبي 2

لتكن f دالة معرفة على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ بـ $f(x) = \tan x$
(أ) عين المشتقة f' للدالة f .

(ب) استنتج الدالة الأصلية للدالة $\tan^2 x : x \mapsto \tan^2 x$ و التي تتعذر من أجل $x = \frac{\pi}{4}$

✓ الحل

(أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

(ب) لدينا $\tan^2 x = f'(x) - 1$ ومنه الدوال الأصلية للدالة $\tan^2 x : x \mapsto \tan^2 x$ هي الدوال $G(x) = f(x) - x + k$ حيث k عدد حقيقي.

$G(\frac{\pi}{4}) = 0$ يكافئ $\tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} + k = 0$ يكافئ $k = \frac{\pi}{4} - 1$

إذن الدالة الأصلية المطلوبة هي $G(x) = \tan(x) - x + \frac{\pi}{4} - 1$

4 - حساب الدوال الأصلية

4-1 دوال أصلية لدوال شهيرة

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين f و g على التوالي على مجال I
فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

- إذا كانت F دالة أصلية لدالة f على I و λ عدد حقيقي

فإن λF أصلية لـ λf على I

- نفس النتائج المعروفة حول مشتقات الدوال الشهيرة وبقراءة مقلوبة تعطي لنا الدوال الأصلية كما في الجدول التالي:

الدالة f	الأصلية F	على المجال $I = \dots$
ثابت a	ax	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
(n صحيح سالب و يختلف عن -1) x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$

$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

2-4 دساتير عامة

معرفة مشتق بعض الدوال المركبة يسمح لنا بتعيين دوال أصلية لدوال أخرى و الجدول التالي يلخص هذه الحالات مع U دالة قابلة للاشتقاق على I .

ملاحظة	الأصلية F	الدالة f
لما $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ من أجل كل x من I $U(x) \neq 0$	$\frac{1}{n+1} U^{n+1}$	U^n ($n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$)
$U > 0$ على I	$2\sqrt{U}$	$\frac{U'}{\sqrt{U}}$
$U \neq 0$	$\ln U $	$\frac{U'}{U}$
	e^U	$U' e^U$
g دالة أصلية للدالة U على I	$x \mapsto \frac{1}{a} g(ax+b)$	$x \mapsto U(ax+b)$

تمارين تدريبية

عين الدالة الأصلية F على I من أجل كل دالة f مستمرة على المجال المعطى

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}, I =]\frac{1}{2}, +\infty[\quad (\text{ب}) \quad f(x) = (2x-3)^3, I = \mathbb{R} \quad (\text{ا})$$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+3}}, I = \mathbb{R} \quad (\text{د}) \quad f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, I = \mathbb{R} \quad (\text{ج})$$

الحل ✓

نكتب f على شكل $g \alpha$ حيث α عدد حقيقي و g دالة نعرف دالتها الأصلية باستعمال الدساتير العامة و الأشكال التي نبحث عنها هي من الشكل :

$$f = \alpha U' e^U, \quad f = \alpha \frac{U'}{\sqrt{U}}, \quad f = \alpha \frac{U'}{U}, \quad f = \alpha U' U^n$$

(ا) نضع $U(x) = 2x-1$ وبالتالي $f(x) = (U(x))^3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 2$

$$\text{إذن } f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (U(x))^3 = \frac{1}{2} \times U'(x) \times (U(x))^3$$

إذن فالدالة الأصلية على \mathbb{R} هي F حيث $F = \frac{1}{2} \times \frac{U^4}{4} = \frac{U^4}{8}$

و من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4$

(ب) نضع $U(x) = 2x-1$ وبالتالي $f(x) = \frac{1}{U^3(x)}$

الدالة U قابلة للاشتقاق على $]\frac{1}{2}, +\infty[$ ولدينا $U'(x) = 2$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(U(x))^3} = \frac{1}{2} \times \frac{U'(x)}{(U(x))^3} = \frac{1}{2} U'(x) \times (U(x))^{-3}$$

إذن فالدالة الأصلية على I هي $F = \frac{1}{2} \times \frac{U^{-2}}{-2} = \frac{-1}{4} U^{-2}$

و من أجل كل x من I يكون $F(x) = \frac{-1}{4(2x-1)^2}$

(ج) نضع $x^2+1 = U(x)$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 2x$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{3}{2} \frac{U'(x)}{U(x)}$$

إذن فالدالة الأصلية على \mathbb{R} ل f هي F حيث $F(x) = \frac{3}{2} \ln|U(x)|$

وبما أن $U(x) > 0$ فإن $F(x) = \frac{3}{2} \ln U(x)$

إذن من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $F(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2+1)$

(د) نضع $U(x) = 3x^2+3$

الدالة U قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $U'(x) = 6x$

$$\text{وبالتالي } f(x) = \frac{5}{6} \times \frac{6x}{\sqrt{3x^2+3}} = \frac{5}{6} \times \frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$$

إذن فالدالة الأصلية على \mathbb{R} ل f هي $F = \frac{5}{3} \sqrt{U}$

و من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $F(x) = \frac{5}{3} \sqrt{3x^2+3}$

5 - حساب التكامل

1-5 حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لكيفية للدالة f على I وإذا كان a و b عددين حقيقيين من I فإن $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

الإثبات

الدالة $G: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ هي دالة أصلية لـ f على I بحيث $G(a) = 0$ إذا كانت F دالة أصلية لكيفية لـ f على I فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت k بحيث من أجل كل x من I لدينا $G(x) = F(x) + k$ وبما أن $G(a) = 0$ فإن $k = -F(a)$ إذن من أجل كل x من I يكون $G(x) = F(x) - F(a)$ وباختيار $x = b$ نحصل على $G(b) = F(b) - F(a)$ أي $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

ملاحظة

نكتب الفرق $F(b) - F(a)$ على الشكل $[F(x)]_a^b$

و كذلك $\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

مثال -

1) على \mathbb{R} الدالة $x \mapsto \sin x$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto -\cos x$ ومنه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1$$

2) على \mathbb{R} الدالة $x \mapsto x^2 + x + 1$ لها دالة أصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ومنه

$$\int_0^1 (t^2 + t + 1) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - (0) = \frac{11}{6}$$

2-5 التكامل بالتجزئة

مبرهنة

U و V دالتان قابلتان للاشتقاق على I بحيث مشتقاتهما U' و V' مستمرتان على I عندئذ من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I يكون،

$$\int_a^b U(t) V'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t) V(t) dt$$

الإثبات

الدالة $U \times V$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$

$$U V' = (U V)' - U' V$$

بما أن الدوال $U V'$ ، $(U V)'$ و $U' V$ مستمرة على I فإن،

$$\int_a^b (U V')(t) dt = \int_a^b [(U V)'(t) - (U' V)(t)] dt$$

$$(1) \quad \int_a^b (U V')(t) dt = \int_a^b (U V)'(t) dt - \int_a^b (U' V)(t) dt$$

لكن $U V$ هي الدالة الأصلية لـ $(U \times V)'$ على I

$$\int_a^b (U V)'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b$$

ومنه المساواة (1) تكتب على الشكل،

$$(2) \quad \int_a^b U(t) V'(t) dt = [U(t) V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t) V(t) dt$$

تسمى المساواة (2) دستور التكامل بالتجزئة.

مثال -

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

الحل

التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ من الشكل $\int_a^b U(t) V'(t) dt$ مع $U(t) = t$ و $V'(t) = \sin t$

ومنه نجد $U'(t) = 1$ و $V(t) = -\cos t$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ومشتقاتهما U' و V' مستمرتان على

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \left[-t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t dt = \left[-t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \left[\left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cos 0) \right] - \left[\left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) - (-\sin 0) \right] = 1$$

تمرين تدريبي 1

(أ) احسب قيمة التكامل $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(ب) احسب قيمة التكامل $J = \int_0^1 x e^x dx$

✓ الحل

الساكنات العامة لا تسمح لنا بتعيين الدالة الأصلية للدالتين $x \mapsto x \cos x$ و $x \mapsto x e^x$.
(أ) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = \cos x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = \sin x$.

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و U' و V' مستمرتان على \mathbb{R}

وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد $I = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

$$= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0) - (0) - [1 - (-1)] = -2$$

(ب) نضع $U(x) = x$ و $V'(x) = e^x$ ومنه نجد $U'(x) = 1$ و $V(x) = e^x$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R}

و U' و V' مستمرتان على \mathbb{R}

إذن حسب دستور التكامل بالتجزئة نجد :

$$J = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

تمرين تدريبي 2

أوجد دالة أصلية على المجال $[0, +\infty[$ للدالة $f: x \mapsto \ln x$

✓ الحل

بما أن الدالة f مستمرة على $[0, +\infty[$ فإنها تقبل دالة أصلية من الشكل:

$$F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t dt \quad \text{ونكتب} \quad F(1) = 0 \quad \text{و} \quad F: x \mapsto \int_1^x \ln t dt$$

بوضع $U'(t) = 1$ و $V(t) = \ln(t)$ نجد $U(t) = t$ و $V'(t) = \frac{1}{t}$

الدالتان U و V قابلتان للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ودالتاهما المشتقتان U' و V' مستمرتان على $[0, +\infty[$ وحسب دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$F(x) = \int_1^x 1 \times \ln t dt = \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x 1 dt = \left[t \ln t \right]_1^x - \left[t \right]_1^x = x \ln(x) - x + 1$$

إذن الدالة $x \mapsto \ln x$ أصلية للدالة $x \mapsto x \ln(x) - x + 1$ على المجال $[0, +\infty[$

بحيث $F(1) = 0$

لاحظ أنه إذا أضفنا -1 إلى الدالة F نحصل على دالة أصلية أخرى لـ $x \mapsto \ln x$ هي :

$$x \mapsto x \ln(x) - x$$

6 - تطبيقات الحساب التكاملي

1-6 حساب مساحة حيز من مستو

تعريف التكامل لدالة مستمرة يسمح لنا بحساب مساحة حيز من مستو محدود بمنحني هذه الدالة.

خواص

(1) إذا كانت الدالة f مستمرة و موجبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي

لمجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $f(x) \geq y \geq 0$ هي $\int_a^b f(x) dx$

(2) إذا كانت f دالة مستمرة وسالبة على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي

لمجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $0 \geq y \geq f(x)$ هي $-\int_a^b f(x) dx$

(3) إذا كان لدينا $f(x) \leq g(x)$ على $[a, b]$ فإن مساحة حيز من المستوي لمجموعة

النقط $M(x, y)$ بحيث $b \geq x \geq a$ و $g(x) \geq y \geq f(x)$ هو $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx$

ملاحظة

- 1) لحساب المساحة المحصورة بين منحنيتين f و g على $[a, b]$ نتبع ما يلي :
- نجزئ هذا المجال إلى مجالات جزئية بحيث فرق الدالتين يحافظ على إشارة ثابتة.
- تكامل دالة الفرق و نراعي العلاقة الوجودية بين التكامل و المساحة.

$$A = - \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (g(x) - f(x)) dx$$

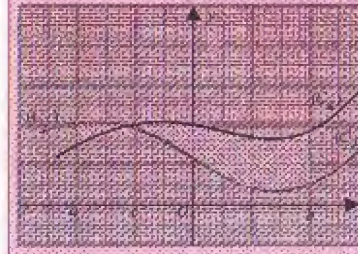
(2) في معلم متعامد و متجانس

وحدة المساحة هي مساحة المربع الذي طولاه

ضلعاه $\|\vec{i}\|$ اما في معلم متعامد وحدة المساحة

هي مساحة المستطيل

الذي ابعاده $\|\vec{i}\|$ و $\|\vec{j}\|$



مثال -

f دالة معرفة على المجال $[-1, 4]$ بحيث $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2)$

و (γ) منحنىها البياني في معلم متعامد و متجانس.

(1) ارسم (γ) على المجال $[-1, 4]$.

(2) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد ب (γ) و محور القواصل (xx') و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=2$ و $x=4$.

الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-1, 4]$ و لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x)$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x=0$ او $x=2$

- إذا كان $x \in [-1, 0] \cup [2, 4]$ فإن f' متزايدة تماما.

- إذا كان $x \in [0, 2]$ فإن f' متناقصة تماما.

و منه جدول تغيرات f على $[-1, 4]$ هو

x	-1	0	2	4	
$f'(x)$ إشارة	+	0	-	0	+
f تغيرات		↗	↘	↗	
	-2	0	-2	8	

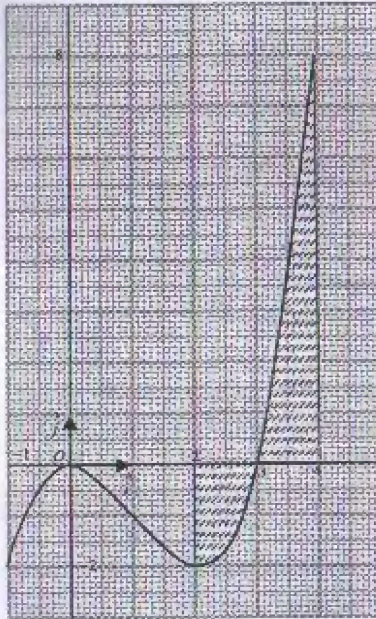
(2) على المجال $[2, 3]$ يكون $f(x) \leq 0$
و على المجال $[3, 4]$ يكون $f(x) \geq 0$
و منه المساحة المطلوبة

$$A = \left(- \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \right)$$

الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي

$$x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$$

$$A = - \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right]_2^3 + \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \right]_3^4 = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$



2-6 حساب الحجم :

نعتبر مجسما Σ محدودا بالمستويين التوازيين (p_1)

و (p_2) ذوي المعادلتين $Z=a$ و $Z=b$

على التوالي في معلم متعامد و متجانس و ليكن V

حجم هذا الجسم و $S(Z)$ مساحة مقطع منه

بالمستوي (p) للوازي ل (p_1) و (p_2) معادلته $Z=a$ مع $b \geq a \geq a$.

حجم هذا الجسم يعطى بالعلاقة $V = \int_a^b S(z) dz$

وحدة الحجم هي حجم متوازي المستطيلات القائم

الذي احرافه $\|\vec{i}\|$ ، $\|\vec{j}\|$ ، $\|\vec{k}\|$

مجسم دورانى محوره (xx')

ليكن (γ) قوس من منحنى المثل للدالة f

حيث $y=f(x)$ مع $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$.

بتدوير (γ) حول (xx') فإن القوس (γ) يولد

مساحة دوارنية محورها (xx') و هذه المساحة تحدد

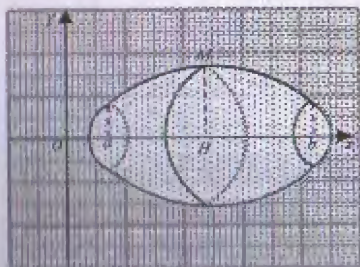
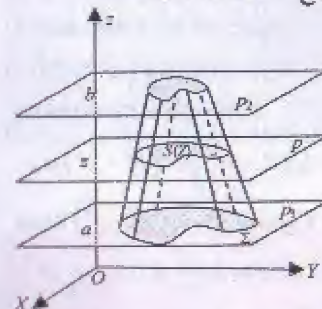
مجسما دورانيا.

و مقطع هذا الجسم بمستوي عمودي

على (xx') يعطي قرصا مساحته πHM^2

أي $\pi(f(x))^2$ حيث $M(x, f(x))$ نقطة من (γ)

و حجم هذا الجسم يعطى بالعلاقة $V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$



ملاحظة

من أجل مجسم دوراني محوره (x, x') فإن العلاقة $V = \int_a^b a f^2(x) dx$ تستنتج و هذا بتصورنا المحور (x, x') في مكان (z, z')

مثال .

أوجد الدستور الذي يعطي حجم كرة نصف قطرها R .

الحل

في معلم متعامد ومتجانس للفضاء نعتبر الكرة التي مركزها O و طول نصف قطرها R .

إذا أخذنا مقطع كرة بمستوي ذي المعادلة $Z = a$

مع $R > a > -R$ نحصل على دائرة مركزها

Ω ينتمي إلى (z, z') نصف قطرها ΩM .

و في الثلث القائم $O \Omega M$

لدينا $O \Omega^2 + \Omega M^2 = O M^2$

ومنه $\Omega M^2 = O M^2 - O \Omega^2 = R^2 - a^2$

مساحة القرص الذي مركزه Ω

و نصف قطره ΩM هي:

$$S(a) = \pi (R^2 - a^2)$$

ومنه الحجم المطلوب هو:

$$V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz$$

الدالة $z \mapsto \pi (R^2 - z^2)$ مستمرة على $[-R, R]$ و دالتها الأصلية هي:

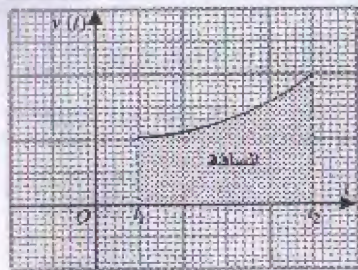
$$z \mapsto \pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right)$$

$$V = \left[\pi \left(R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \right]_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right)$$

$$= \pi \left[+\frac{2}{3} R^3 + \frac{2}{3} R^3 \right] = \frac{4}{3} \pi R^3$$

3-6 العبارة التكاملية للمسافة المقطوعة و السرعة المتوسطة

- إذا علمنا أن السرعة اللحظية $V(t)$ لتحرك بدلالة الزمن t فإن المسافة المقطوعة $d(t_1, t_2)$ لهذا التحرك بين اللحظتين t_1 و t_2 هي:



$$d(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

- السرعة المتوسطة V_M بين اللحظتين t_1 و t_2 هي:

$$V_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

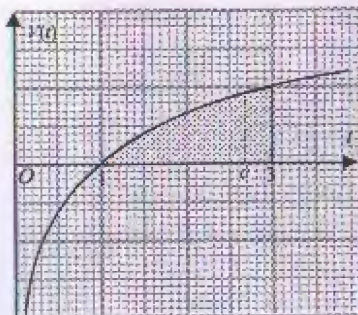
مثال .

من أجل كل $t > 0$ ، السرعة اللحظية لتحرك هي $V(t) = \ln t$

احسب المسافة المقطوعة من طرف التحرك بين اللحظتين $t_1 = 1$ و $t_2 = 3$ ثم

احسب السرعة المتوسطة له.

الحل



$$d(t_1, t_2) = \int_1^3 v(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^3$$

$$= (3 \ln(3) - 3) - (0 - 1)$$

$$d = 3 \ln(3) - 2 \approx 1.3 m$$

$$V_M = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \ln(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.3 \approx 0.65 m/s$$

تدريب تدريبي - 1

(أ) النحني الممثل للدالة $x \mapsto \cos x$ المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

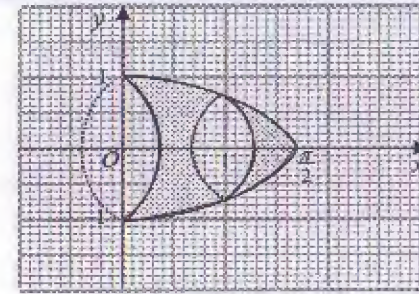
(ب) احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (γ) و محور القواصل.

(ج) احسب الحجم للوليد بدوران النحني (γ) حول المحور (x, x')

الحل

(أ) الدالة $\cos x$ موجبة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

و المساحة المطلوبة هي $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$



$$S = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

(ب) الدالة \cos موجبة على $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

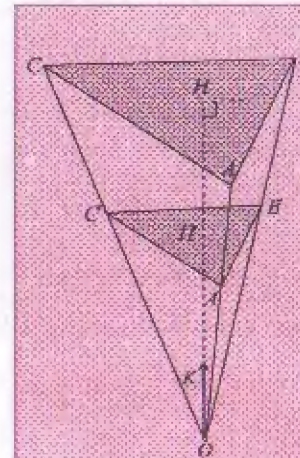
و الحجم المطلوب يساوي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x dx$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ لدينا}$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة F حيث:

$$V = \pi \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \right) = \pi \times \frac{1}{4} \pi = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{إذن} \quad F(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

تمرين تدريبي - 2



لنعتبر هرم $OABC$ (مثلث الأوجه) كما هو موضح في الشكل، ارتفاعه $[OH]$

حيث $OH = h$ و S مساحة القاعدة ABC .

لتكن H' نقطة من المحور (O, \vec{k})

نقع داخل الهرم. ومقطع الهرم بالمستوي الموازي للمستوي (ABC) و المار من H' هو

مثلث $A'B'C'$. نضع $OH' = z$.

(1) استعمل التحاكي الذي مركزه O

لإثبات أن المساحة $S(z)$ للمقطع $A'B'C'$ هي:

$$S(z) = S \times \frac{z^2}{h^2}$$

(2) احسب حجم الهرم بدلالة S و h .

✓ الحل

$$(1) \quad \frac{OH'}{OH} = \frac{z}{h} = k \quad \text{منه} \quad OH' = kOH \quad \text{وبما أن} \quad \vec{OH'} \text{ و } \vec{OH} \text{ لهما نفس الإتجاه}$$

فإن $\vec{OH'} = k\vec{OH}$ وهذا يعني H' صورة H بالتحاكي الذي مركزه النقطة O

ونسبته $k = \frac{z}{h}$

$$(HB) \perp (OH) \quad \text{و} \quad (OH') \perp (H'B') \quad \text{و} \quad (HB) \perp (H'B')$$

الدوال الأصلية و حساب التكاملات

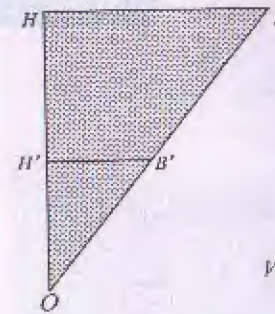
حسب نظرية طاليس $\frac{OH'}{OH} = \frac{OB'}{OB} = k$ وهذا يعني أن صورة B بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته k

بنفس الطريقة نبين أن صورة A و C صورة A' و C' بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته $k = \frac{z}{h}$

إذا كانت S مساحة ABC و $S(z)$ مساحة $A'B'C'$

$$S(z) = k^2 S \quad \text{ومنه} \quad S(z) = \frac{z^2}{h^2} S$$

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h S \frac{z^2}{h^2} dz = S \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{Sh}{3} \quad (2)$$



تطبيقات نموذجية



تطبيق 1

حساب تكامل دالة درجية

(1) مثل الدالة الدرجية f ثم احسب التكامل $I(f)$ على $[-2, 3]$

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}, & 0 < x \leq -2 \\ f(x) = +1, & 3 \geq x \geq 0 \end{cases} \text{ حيث}$$

(2) مثل الدالة f المعرفة على $[0, 3]$ بـ $f(x) = E(x) - x$ حيث E دالة الجزء الصحيح ثم احسب التكامل $I(f)$ على المجال $[0, 3]$

الحل ✓

الدالة f سالبة على المجال $[-2, 0]$ ومنه $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي أبعاده 2 و $\frac{1}{2}$

$$I(f) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

الدالة f موجبة على المجال $[0, 3]$ ومنه $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده 3 و 1 أي $I(f) = 1 \times 3 = 3$
تكامل الدالة f على المجال $[-2, 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا
أي $3 - 1 = +2$

$$\begin{cases} f(x) = -x, & x \in [0, 1] \\ f(x) = 1-x, & x \in [1, 2] \\ f(x) = 2-x, & x \in [2, 3] \end{cases} \quad (2)$$

- الدالة f سالبة على المجال $[0, 1]$ وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1 على $[0, 1]$ - الدالة f سالبة على المجال $[1, 2]$ وبالتالي $I(f)$ يساوي -1- الدالة f سالبة على المجال $[2, 3]$ وبالتالي فإن $I(f)$ يساوي -1وعليه فالتكامل f على $[0, 3]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي

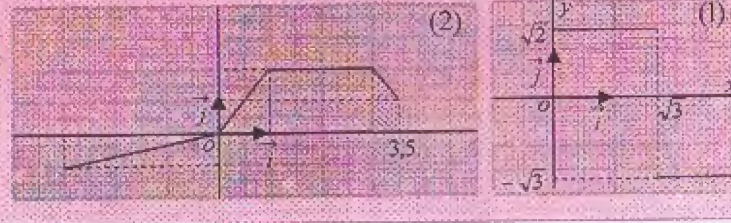
$$-1 - 1 - 1 = -3$$



تطبيق 2

حساب تكامل دالة درجية و تكامل دالة تألفية بالقطع

(1) الشكل (1) يمثل التمثيل البياني لدالة درجية

عين عبارة $f(x)$ ثم احسب التكامل f على مجال تعريفها.(2) الشكل (2) يمثل المنحنى البياني لدالة تألفية بالقطع. احسب التكامل $I(f)$ باستعمال المساحة

الحل ✓

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, & \sqrt{3} < x \leq 0 \\ f(x) = -\sqrt{3}, & 3 \geq x \geq \sqrt{3} \end{cases} (1)$$

 f موجبة على المجال $[0, \sqrt{3}]$ وبالتالي $I(f)$ يساوي مساحة المستطيل الذي أبعاده

$$\sqrt{3} \text{ و } \sqrt{2} \text{ منه } I(f) = \sqrt{6}$$

 f سالبة على المجال $[\sqrt{3}, 3]$ وبالتالي $I(f)$ هو نظير مساحة المستطيل الذي

$$\text{أبعاده } (3 - \sqrt{3}) \text{ و } \sqrt{3} \text{ وبالتالي } I(f) = -\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})$$

إذن تكامل f على $[0, 3]$ يساوي المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليها سابقا أي

$$I(f) = [\sqrt{6} - \sqrt{3}(3 - \sqrt{3})]$$

(2) - الدالة f سالبة على المجال $[-3, 0]$ وبالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث التي

$$\text{تساوي } \frac{3}{2} \text{ منه } I(f) = -\frac{3}{2}$$

- الدالة f موجبة على المجال $[0, 3]$ وبالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة شبه

المنحرف الذي طول قاعدته الكبرى 3 والصغرى 2 وارتفاعه 2 و تساوي

$$\frac{(3+2) \times 2}{2} = 5$$

$$I(f) = 5$$

- الدالة f موجبة على المجال $[3, 3.5]$ وبالتالي فإن التكامل $I(f)$ هو مساحة مثلث

$$\text{الذي قاعدته } 0.5 \text{ وارتفاعه } 1 \text{ و تساوي } \frac{1 \times 0.5}{2} = \frac{1}{4} \text{ ومنه } I(f) = \frac{1}{4}$$

إذن التكامل $I(f)$ على المجال $[-3, 3, 5]$ هو المجموع الجبري للتكاملات المحصل عليه سابقا و تساوي $-\frac{3}{2} + 5 + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

تطبيق 3

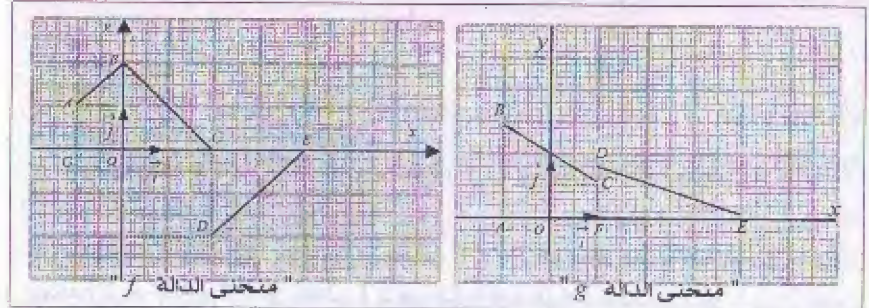
حساب تكامل دالة تآلفية بالقطع

ف. و. دالتان تآلفتان بالقطع معرفتان على المجال $[-1, 4]$

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{1}{2}x + 1, & x \in [-1, 1] \\ g(x) = -\frac{1}{4}x + 1, & x \in [1, 4] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x + 2, & x \in [-1, 0] \\ f(x) = -x + 2, & x \in [0, 2] \\ f(x) = x - 4, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

احسب تكاملي f و g على $[-1, 4]$

✓ الحل



- الدالة f موجبة على $[-1, 0]$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $OBAQ$ التي تساوي 1.5 ومنه $I(f) = 1.5$

- الدالة f موجبة على المجال $[0, 2]$ و بالتالي فإن $I(f)$ يساوي مساحة المثلث OBC التي تساوي 2 ومنه $I(f) = 2$

- الدالة f سالبة على المجال $[2, 4]$ و بالتالي فإن $I(f)$ هو نظير مساحة المثلث CDE التي تساوي 2 ومنه $I(f) = -2$

إذن تكامل f على $[-1, 4]$ هو المجموع الجبري للتكاملات و عليه $I(f) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

- الدالة g موجبة على $[-1, 1]$ و بالتالي فإن $I(g)$ يساوي مساحة شبه المنحرف $ABCF$ و التي تساوي 2.25 ومنه $I(g) = 2.25$

- الدالة g موجبة على المجال $[1, 4]$ و بالتالي $I(g)$ هي مساحة المثلث DFE و التي تساوي $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ ومنه $I(g) = \frac{9}{8}$ إذن تكامل g على $[-1, 4]$ هو $2.25 + \frac{9}{8} = \frac{27}{8}$

تطبيق 4

حساب تكامل دالة تآلفية

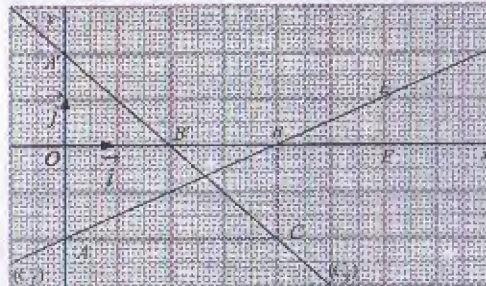
الدالتان f و g معرفتان على \mathbb{R} ب $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ و $g(x) = 2 - x$

(1) ارسم (C_f) و (C_g) في معلم متعامد و متجانس

(2) باستعمال حساب المساحات احسب التكاملات التالية $\int_0^2 g(x) dx$

$$\int_4^6 f(x) dx, \quad \int_0^4 f(x) dx, \quad \int_2^4 g(x) dx$$

✓ الحل



(1) المنحني الممثل للدالة f عبارة عن مستقيم يمر من النقط $A(0, -2)$ و $B(4, 0)$ و $E(6, 1)$

المنحني الممثل للدالة g عبارة عن مستقيم يمر من النقط $C(4, -2)$ و $B'(2, 0)$ و $A'(0, 2)$

(2) الدالة f موجبة ومستمرة على $[4, 6]$

و بالتالي فإن تكامل f على $[4, 6]$ يساوي مساحة المثلث $BE'E$

$$\int_4^6 f(x) dx = 1 \text{ ومنه}$$

- الدالة f سالبة ومستمرة على المجال $[0, 4]$

و بالتالي فإن تكامل f على $[0, 4]$ هو نظير مساحة المثلث OBA التي تساوي 4

$$\int_0^4 f(x) dx = -4 \text{ إذن}$$

- الدالة g معرفة و موجبة على $[0, 2]$ و بالتالي فإن تكامل g على $[0, 2]$

$$\int_0^2 g(x) dx = 2 \text{ يساوي مساحة المثلث } OBA' \text{ التي تساوي 2 إذن}$$

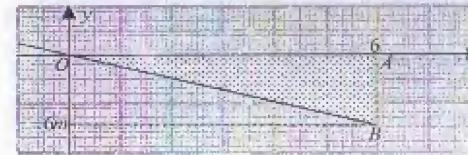
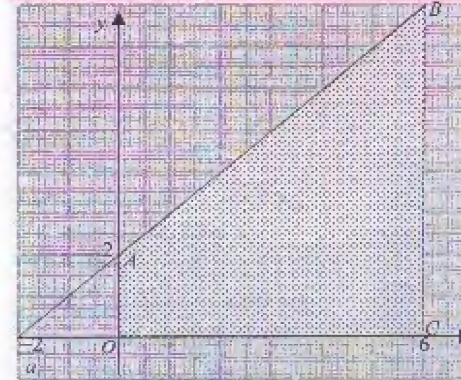
- الدالة g سالبة على المجال $[2, 4]$ و بالتالي فإن تكامل f على $[2, 4]$ هو نظير

مساحة المثلث BBC التي تساوي 2

$$\int_2^4 g(x) dx = -2 \text{ إذن}$$

تطبيق 5 تعيين دالة علم تكاملها

- (1) أوجد دالة تلافية p بحيث $p: x \mapsto ax+2$ مع $a > 0$ التي تكاملها على المجال $[0, 6]$ هي 16
 (2) أوجد الدالة التلافية q بحيث $q: x \mapsto mx$ التي تكاملها على المجال $[0, 6]$ يساوي -8 مع $m < 0$

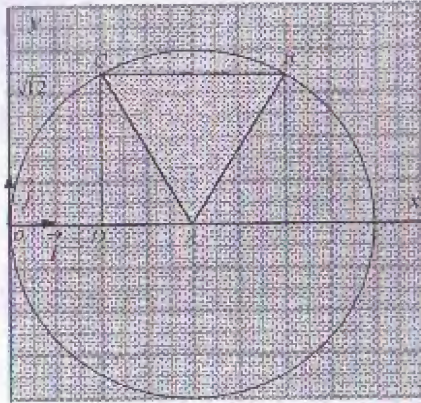


- (1) بما أن p موجبة على $[0, 6]$ فإن تكامل p على $[0, 6]$ يساوي مساحة شبه النحرَف $OBAC$ والتي تساوي،

$$\frac{(2+6a+2) \times 6}{2} = 18a+12$$
 وبالتالي $18a+12=16$ منه نستنتج،
 $a = \frac{2}{9}$ إذن $p(x) = \frac{2}{9}x+2$
 (2) بما أن q سالبة على المجال $[0, 6]$ فإن تكامل q على $[0, 6]$ هو نظير مساحة المثلث OAB التي تساوي $|18m|$ وبالتالي $|18m| = -(-8)$ أي $|18m| = 8$ ومنه $m = -\frac{4}{9}$

✓ الحل

✓ الحل



- (1) الدائرة التي مركزها A وتمر من O هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث $AM = OA$
 وبما أن $OA = 4$ فإن $AM = 4$ وعليه $(x-4)^2 + y^2 = 16$
 $OB = 4$ و $OC = 4$ (2)
 لأن B و C نقطتان من الدائرة (C)
 ترتب كل من B و C هو $\sqrt{12}$
 ومنه $BC = \sqrt{(6-2)^2 + 0^2} = 4$
 ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

(3) حساب $I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx$

الدالة $x \mapsto \sqrt{8x-x^2}$ موجبة على المجال $[0, 8]$ وبالتالي فإن تكامل f على $[0, 8]$ يساوي مساحة نصف القرص الذي مركزه A ونصف قطره 4 والتي تساوي $\frac{1}{2} \pi \times 4^2$ أي 8π

إذن $I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx = 8\pi$

$J = \frac{I}{3} + 2 \times (\text{مساحة } ACD)$

$J = \frac{8}{3} + 2 \times \frac{2 \times \sqrt{12}}{2} = \frac{8}{3} + 2\sqrt{12} = \frac{8 + 6\sqrt{12}}{3}$

حساب التكامل باستعمال الخطية

تطبيق 7

- (1) إذا علمت أن $\int_0^3 f(x) dx = 3$ و $\int_0^3 g(x) dx = -3$ احسب مايلي:
 $k = \int_0^3 (2f(x) - 3g(x)) dx$ ، $J = \int_0^3 \frac{1}{5} g(x) dx$ ، $I = \int_0^3 4f(x) dx$
 (2) من أجل كل x من المجال $0, \frac{\pi}{4}$ فارق بين $\cos x$ و $\sin x$
 ثم بين $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$

حساب التكامل بالاعتماد على مساحة قرص

تطبيق 6

- (1) بين أن الدائرة (C) التي مركزها النقطة $A(4, 0)$ و المارة من مبدأ العلم تكتب على الشكل $(x-4)^2 + y^2 = 16$
 (2) نعلم النقطتين B و C من الدائرة (C) فاصلتهما 5 و 3 على الترتيب و بحيث ترتبها موجبة. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
 (3) استنتج التكاملين التاليين و هذا باستعمال المساحات:

$J = \int_0^6 \sqrt{8x-x^2} dx$ ، $I = \int_0^8 \sqrt{8x-x^2} dx$

✓ الحل

$$J = \frac{1}{5} \int_0^3 g(x) dx = \frac{1}{5} (-3) = -\frac{3}{5} \quad \text{و} \quad I = 4 \int_0^3 f(x) dx = 4(3) = 12 \quad (1)$$

$$K = 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2I - 3J = 15$$

$$(2) \text{ من أجل كل } x \text{ من } \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ لدينا } \cos x > \sin x \text{ وبالتالي } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$$

تطبيق 8

المقارنة بين تكاملين

قارن بين العددين الحقيقيين I و J . وذلك بدون حساب قيمتهما في كل حالة من الحالات التالية.

$$(1) \quad J = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln x \quad \text{و} \quad I = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx \quad \text{ب) } J = \int_0^1 x^2 e^x dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{ج) } J = \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt$$

✓ الحل

(1) من أجل كل x من $[0, 1]$ يكون $x^2 \leq x$ بالضرب في e^x نجد $x^2 e^x \leq x e^x$ ومنه

$$J \leq I \quad \text{إذن} \quad \int_0^1 x^2 e^x dx \leq \int_0^1 x e^x dx$$

ب) من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ يكون $\ln x < x$ بالضرب في x نجد $x \ln x < x^2$

$$\text{ومنّه} \quad J < I \quad \text{إذن} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x \ln x < \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dx$$

ج) من أجل كل t من $[0, 1]$ يكون $1+t < 2+t$ وبالقلب نجد $\frac{1}{1+t} > \frac{1}{2+t}$

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt > \int_0^1 \frac{t}{2+t} dt \quad \text{بالمرور إلى التكامل نجد}$$

إذن $J > I$.

تطبيق 9

إثبات متباينات

برهن المتباينات التالية:

$$(1) \quad \frac{9}{2} \leq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \leq 9 \quad \text{ب) } 1 \leq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \leq 2$$

$$\text{ج) } 2 \ln 2 \leq \int_1^3 \ln(x^2+1) dx \leq 2 \ln 10 \quad \text{د) } \frac{1}{3} \leq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \leq \frac{1}{2}$$

✓ الحل

(1) من أجل كل t من $[0, 4]$ يكون $2 \geq \sqrt{t} \geq 0$ بإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد:

$$4 \geq 2 + \sqrt{t} \geq 2 \quad \text{بالقلب نجد} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{4}$$

$$2 \geq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \geq 1 \quad \text{أي} \quad \int_0^4 \frac{1}{2} dt \geq \int_0^4 \frac{1}{2+\sqrt{t}} dt \geq \int_0^4 \frac{1}{4} dt$$

ب) بما أن $3 \geq x \geq 0$ فإن $2 \geq \sqrt{1+x} \geq 1$ بالضرب في x نجد:

$$2x \geq x\sqrt{1+x} \geq x \quad \text{بالمرور إلى التكامل نجد}$$

$$9 \geq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \geq \frac{9}{2} \quad \text{أي} \quad \int_0^3 2x dx \geq \int_0^3 x \sqrt{1+x} dx \geq \int_0^3 x dx$$

ج) من أجل كل t من $[0, 1]$ لدينا $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+t^2} \geq \frac{1}{3}$ وبالمرور إلى التكامل نجد:

$$\frac{1}{2} \geq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \geq \frac{1}{3} \quad \text{منه نجد} \quad \int_0^1 \frac{1}{2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{3} dt$$

د) من أجل كل x من $[1, 3]$ لدينا $10 \geq x^2+1 \geq 2$ ومنه ينتج:

$$\ln 10 \geq \ln(x^2+1) \geq \ln 2$$

$$\text{بالمرور إلى التكامل نجد} \quad 2 \ln 10 \geq \int_1^3 \ln(x^2+1) dx \geq 2 \ln 2$$

تطبيق 10

حصر تكامل دالة

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$$

(1) بدراسة تغيرات الدالتين K و h على المجال $[0, 1]$ بحيث:

(ب) المتباينة (2) تصبح $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x)}$

بالتبسيط نجد $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2}$ وبالمرور إلى

التكامل تجد $\int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2} \right] dx$ منه نستنتج:

$$\left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}Ln(x+1) + \frac{1}{2}x \right]_0^1$$

$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2}Ln(2)$ إذن $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2}Ln(2)$

تطبيق 1

دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ كما يلي I_n متتالية معرفة على \mathbb{N}

(1) احسب I_1 ثم $I_0 + I_1$ واستنتج I_0

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n احسب $I_n + I_{n+1}$

(2) برهن أنه من أجل كل x من $[0, 1]$

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

ثم أعط حصرًا لـ I_n

(3) استنتج نهاية كل من المتتاليتين (I_n) و $\left(\frac{I_n}{e^n}\right)$

الحل

(1) من أجل $n=1$ لدينا $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

بوضع $u(x) = e^x + 1$ نجد $u'(x) = e^x$ منه:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [Ln(u(x))]_0^1 = [Ln(e^x + 1)]_0^1 = Ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

$h(x) = e^{-x} + x - 1$ و $K(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ بين أنه من أجل كل x من

$[0, 1]$ يكون $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ (1) ...

(2) استنتج حصرًا لـ e^{-x^2} لما x ينتمي إلى $[0, 1]$ ثم بين أنه من أجل

كل x من $[0, 1]$ يكون $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$ (2) ...

(3) (ا) استنتج أنه من أجل كل x من $[0, 1]$:

$$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

(ب) استنتج من المتباينة (2) أن $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{Ln 2}{2}$

الحل

(1) h قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ ولدينا $H(x) = -e^{-x} + 1$

الدالة K قابلة للاشتقاق على $[0, 1]$ ولدينا $K'(x) = h(x)$

وبما أن $h(x) \geq 0$ فإن $K'(x) \geq 0$

ومنه فإن الدالة K متزايدة تمامًا على $[0, 1]$.

x	0	1
$K'(x)$	0	+
$K(x)$	0	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

x	0	1
$H(x)$	0	+
$h(x)$	0	$\frac{1}{e}$

$h(x) > 0$ يكافئ $e^{-x} \geq 1 - x$ (*) ...

$K(x) > 0$ يكافئ $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ (**) ...

من (*) و (**) نجد $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ (1) ...

(2) بما أن x ينتمي إلى $[0, 1]$ فإن $x^2 \in [0, 1]$ وباستبدال x بـ x^2 في المتباينة (1)

نجد $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ بالقسمة على $1+x$ نجد:

(2) ... $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$

(3) (ا) بعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ x^4 على $1+x$ نجد $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

بما أن $I_0 + I_1 = 1$ و $I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ فإن $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

(ب) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x} dx$
 $= \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{1}{n} e^{nx}\right]_0^1$
 $= \frac{1}{n} e^n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

(2) من أجل كل x من $[0, 1]$ لدينا $e \geq e^x \geq 1$ ومنه $e+1 \geq e^x + 1 \geq 2$

بالقلب نجد $\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$ بالضرب في e^{nx} نجد:

$$(1) \dots \frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

بمكاملة حدود التباينة (1) نجد $\left[\frac{1}{n(1+e)} e^{nx}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{2n} e^{nx}\right]_0^1$ بالحساب

نجد: $(2) \dots \frac{1}{n(1+e)} (e^n - 1) \leq I_n \leq \frac{1}{2n} [e^n - 1]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{n(e+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n(1 - e^{-n})}{n(e+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^n}{n}\right) \frac{(1 - e^{-n})}{(e+1)} = +\infty \quad (3)$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{e+1} = \frac{1}{e+1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$)

وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

- بقسمة طرفي التباينة (2) على e^n نجد $\frac{1}{n(e+1)} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \leq \frac{I_n}{e^n} \leq \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{2n}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{2n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{1}{n(e+1)} = 0$

✓ الحل

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ يكون $0 \leq \cos 2x \leq 1$ و $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ومنه $0 \leq x^n \cos 2x \leq x^n$ بالمرور إلى التكامل نجد: $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$

لكن $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

ومنه $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ إذن $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

(ب) بما أن $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = 0$ وبالتالي حسب نظرية الحصر نجد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

تعيين دالة أصلية لدالة

تطبيق 13

(1) بين أن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 3[\cos(3x+2) + x]$ تقبل

دالة أصلية F معرفة بـ $F(x) = \sin(3x+2) + 3\frac{x^2}{2} + 10$

(ب) أوجد دالتين أصليتين أخريتين للدالة f .

(2) بين أن الدالة g المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ تقبل دالة

أصلية G بحيث $G(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$

(ب) H دالة معرفة بـ $H(x) = \ln(7x+7) + \frac{x+2}{x+1}$

هل H دالة أصلية لـ g ؟

✓ الحل

(1) F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R} إذا وفقط إذا كان من أجل كل x من \mathbb{R} : $F'(x) = f(x)$

الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $F'(x) = 3\cos(3x+2) + 3x = f(x)$

منه F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

(ب) جميع الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي من الشكل $F + k$ حيث k ثابت حقيقي

دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

تطبيق 12

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x dx$

(أ) بين أن $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ (ب) استنتج نهاية للمتتالية (I_n) .

و عليه فإن الدالتين $x \mapsto F(x)+1$ و $x \mapsto F(x)+2$ أصليتان لـ f .

- (2) (أ) دالة أصلية لـ g على المجال $]0, +\infty[$ إذا وفقط إذا كانت $G'(x) = g(x)$ الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا $G'(x) = g(x)$ منه دالة أصلية للدالة g على المجال $]0, +\infty[$ (ب) الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا $H'(x) = g(x)$ منه دالة أصلية للدالة g على المجال $]0, +\infty[$

تطبيق 4 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

1) عين دالة أصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $f(x) = 3x^5 + x^4 + x$ (ب) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$

(ج) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ (د) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2) عين الدالة الأصلية G للدالة g في كل حالة من الحالات التالية،

(أ) $g(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x)^3}$ على $]1, +\infty[$ (ب) $g(x) = 3(2x-3)^6$ على \mathbb{R}

(ج) $g(x) = \sin x \cos x$ على \mathbb{R} (د) $g(x) = \frac{5}{(-3x+1)^3}$ على $]-\infty, \frac{1}{3}[$

(هـ) $g(x) = \frac{3}{2x-1}$ على المجال $]\frac{1}{2}, +\infty[$

✓ الحل

(1) لتكن F دالة أصلية للدالة f على I .

(أ) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2$

(ب) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ وبالتالي $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$

(ج) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على \mathbb{R}^* هي $x \mapsto \ln|x|$ والدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

على \mathbb{R}^* هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{x}$ ومنه $F(x) = x + \ln|x| - \frac{1}{x}$

(د) $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ حيث $u(x) = x^2 - 1$ وبالتالي $F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2 - 1}$

(2) (أ) $g(x) = (2x-1)(x^2-x)^{-3}$

حيث $g(x) = u'(x) \times (u(x))^{-3}$ حيث $u(x) = x^2 - x$ ومنه فإن الدالة G معرفة بـ

$G(x) = \frac{u(x)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{(x^2-x)^2}$

(ب) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x) = \frac{3}{2}u'(x)(u(x))^3$ حيث $g(x) = 2x-3$ حيث

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^3$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{4}(u(x))^4$ أي $x \mapsto \frac{1}{4}(2x-3)^4$

ومنه فإن الدالة الأصلية للدالة g هي G حيث $G(x) = \frac{3}{8}(2x-3)^4$

(ج) $g(x) = \sin x \cos x$ ومنه $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة G حيث $G(x) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$

(د) يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $g(x) = 5(-3x+1)^{-3}$

بوضع $u(x) = -3x+1$ نجد $u'(x) = -3$ ومنه $g(x) = \frac{-5}{3}u'(x)(u(x))^{-3}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto u'(x)(u(x))^{-3}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{-1}{2}(u(x))^{-2}$

ومنه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x) = \frac{5}{6(-3x+1)^2}$

(هـ) بوضع $u(x) = 2x-1$ نجد $u'(x) = 2$ ومنه $g(x)$ تكتب على الشكل $g(x) = \frac{3}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ هي $x \mapsto \ln(2x-1)$

ومنه فإن الدالة الأصلية G للدالة g معرفة بـ $G(x) = \frac{3}{2} \ln(2x-1)$

تطبيق 5

تعيين دالة أصلية تحقق شرط معطى

أوجد الدالة الأصلية F للدالة f على مجال I يطلب تعيينه.

(أ) $f(x) = x^2 - 3x - 1$ و $F(0) = 0$ (ب) $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$ و $F(1) = 0$

(ج) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (د) $f(x) = \frac{-1}{2-x}$ و $F(1) = 1$

✓ الحل

(أ) الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} ودوالها الأصلية هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + k$

$F(0) = 0$ يكافئ $k = 0$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x$

(ب) الدالة f معرفة ومستمرة على $]0, +\infty[$ ودوالها الأصلية على هذا المجال هي:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + k$$

$F(1) = 0$ يكافئ $k = \frac{1}{2}$ ومنه الدالة الأصلية هي $x \mapsto -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$

(ج) الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} ودوالها الأصلية من الشكل:

$$F(x) = \frac{-1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ يكافئ } k = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

ومنه الدالة الأصلية هي $x \mapsto \frac{-1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}$

(د) الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $] -\infty, 2[$ ودوالها الأصلية هي:

$$F(x) = \ln(2-x) + k$$

$F(1) = 1$ يكافئ $k = 1$ ومنه الدالة الأصلية التي تحقق الشرط هي $x \mapsto \ln(2-x) + 1$

تطبيق 16 تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة

أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال للعطى في كل حالة من الحالات التالية

(أ) $I = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3e^{-2x+1}$

(ب) $I =]-2, +\infty[$ ، $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}$

(ج) $I =]1, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

(د) $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ ، $f(x) = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$

(هـ) $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ ، $f(x) = \tan^2 x$

(و) $I =]2, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{x+1}{x-2}}$

(ي) $I =]0, +\infty[$ ، $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

✓ الحل

(أ) نضع $u(x) = -2x+1$ منه $u'(x) = -2$ عندئذ $f(x) = \frac{-3}{2} u'(x) e^{u(x)}$

ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{-3}{2} e^{u(x)} = \frac{-3}{2} e^{-2x+1}$

(ب) نضع $u(x) = x$ و $v(x) = \sqrt{x+2}$ عندئذ $u'(x) = 1$ و $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

بالتالي $f(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ وعليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة

$$F(x) = (u \times v)(x) \text{ أي } F(x) = x\sqrt{x+2}$$

(ج) يمكن كتابة $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ وبوضع $u(x) = \ln x$ نجد $u'(x) = \frac{1}{x}$

ومنه $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ وعليه فإن الدالة الأصلية للدالة f على $]1, +\infty[$ هي

$$F(x) = \ln(\ln x) \text{ أي } F(x) = \ln(u(x))$$

(د) من أجل كل x من I لدينا $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

ومنه $f(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = (\tan x)' \times \tan^{-2} x = u'(x)u^{-2}(x)$ حيث $u(x) = \tan x$

وعليه فإن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = -\frac{1}{u(x)}$

$$\text{أي } F(x) = \frac{-1}{\tan x}$$

(هـ) لدينا $f(x) = \tan^2 x$ ولدينا $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

ومنه $\tan^2 x = (\tan x)' - 1$ وبالتالي $f(x) = (\tan x)' - 1$

إذن الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \tan(x) - x$

(و) بوضع $u(x) = \frac{x+1}{x-2}$ نجد $u'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ ومنه $f(x) = \frac{1}{-3} (u'(x))e^{u(x)}$

وعليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{-1}{3} e^{u(x)}$

$$\text{أي } F(x) = -\frac{1}{3} e^{\frac{x+1}{x-2}}$$

(ي) يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x} \times \ln x$ وبوضع $u(x) = \ln x$ نجد $u'(x) = \frac{1}{x}$

وبالتالي $f(x) = u'(x)u(x)$ وعليه فالدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث:

$$f(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

تطبيق 17 تعيين دالة أصلية لدالة ناطقة

$$(1) f \text{ دالة معرفة على }]-1, +\infty[\text{ بـ } f(x) = \frac{x+4}{(x+1)^2}$$

$$(1) \text{ اكتب } f(x) \text{ على الشكل } \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

(ب) استنتج دالة أصلية لـ f على I .

$$(2) g \text{ دالة معرفة على }]2, +\infty[\text{ بـ } g(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2}$$

$$(1) \text{ اكتب } g(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على I .

$$(3) h \text{ دالة معرفة على }]1, +\infty[\text{ بـ } h(x) = \frac{x^2+x^2-x+2}{x^2-1}$$

$$(1) \text{ اكتب } h(x) \text{ على الشكل } \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

(ب) استنتج دالة أصلية لـ h على H .

✓ الحل

$$(1) \text{ بتوحيد المقامات نجد } f(x) = \frac{ax+a+b}{(x+1)^2} \text{ و بالمطابقة مع عبارة } f(x) \text{ نجد :}$$

$$a=1 \text{ و } b=3 \text{ وعليه } f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$(ب) \text{ الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{1}{x+1} \text{ هي } x \mapsto \ln(x+1)$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{(x+1)^2} \text{ هي } x \mapsto \frac{-3}{x+1}$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية لـ } f \text{ هي } F(x) = \ln(x+1) + \frac{-3}{x+1}$$

$$(2) \text{ بنفس الكيفية السابقة نجد أن } g(x) = 2x+1 + \frac{3}{x-2}$$

$$(ب) \text{ الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto 2x+1 \text{ هي الدالة } x \mapsto x^2+x$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{x-2} \text{ هي الدالة } x \mapsto 3 \ln(x-2)$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية لـ } g \text{ هي } F(x) = x^2+x+3 \ln(x-2)$$

$$(3) \text{ بنفس الكيفية السابقة نجد } h(x) = x+1 + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+1)}$$

$$\text{الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \times \frac{1}{x-1} \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x-1)$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \times \frac{1}{x+1} \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x+1)$$

$$\text{و الدالة الأصلية للدالة } x \mapsto x+1 \text{ هي الدالة } x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$$

$$\text{وبالتالي الدالة الأصلية للدالة } h \text{ هي } F \text{ حيث } F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \ln(x-1) - \frac{3}{2} \ln(x+1)$$

تطبيق 18

تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \cos^3 x$$

$$(1) \text{ باستعمال العلاقة } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ بين أن } f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$(2) \text{ استنتج دالة أصلية لـ } f \text{ على } \mathbb{R}$$

✓ الحل

$$(1) \text{ من العلاقة } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ نجد } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{منه } f(x) = \cos x \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$\text{الدالة } x \mapsto \cos x \sin^2 x \text{ من الشكل } x \mapsto u'(x) u^2(x) \text{ حيث } u(x) = \sin x$$

$$\text{و بالتالي فإن دالتها الأصلية هي } x \mapsto \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$\text{إذن الدالة الأصلية للدالة } f \text{ هي الدالة } F \text{ حيث } F(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

تطبيق 19

تعيين دالة أصلية لدالة مثلثية

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$$

$$(1) \text{ بين أن } f(x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$$

$$(2) \text{ استنتج دالة أصلية للدالة } f \text{ على } \mathbb{R}$$

✓ الحل

$$(1) \text{ لدينا } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ منه } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{إذن } f(x) = \sin^2 x \cos x \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$$

(2) الدالة $x \mapsto \cos x \sin^4 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^4$

و بالتالي دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{5} (u(x))^5$ أي $x \mapsto \frac{1}{5} \sin^5 x$

الدالة $x \mapsto \cos x \sin^3 x$ من الشكل $x \mapsto u'(x)(u(x))^3$

ومن هنا فإن دالتها الأصلية هي $x \mapsto \frac{1}{3} (u(x))^3$ أي $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$

إذن الدالة الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x$

وبصفة عامة إذا كانت $f(x) = a \cos^n x \sin^p x$ مع p و n طبيعيين غير معدومين فإن:

- إذا كان أحدهما فردي والآخر زوجي نستعمل المساواة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ التي تسمح لنا بكتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \sin x \times q(\cos x)$ حيث q دالة كثيرة حدود و

بهذه الكتابة نستطيع تعيين دالة أصلية لـ f .

- إذا كان p و n كليهما زوجي نستعمل الكتابة الخطية مما يسمح لنا بكتابة $f(x)$ على شكل مجاميع من الشكل $\lambda \cos(\beta x)$ أو $\mu \sin(\beta x)$ والتي دالتها الأصلية معروفة.

تطبيق 20

تعيين دالة أصلية لدالة أسية

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^3 e^{3x}$

أوجد دالة أصلية F للدالة f على \mathbb{R} بحيث $F(x) = p(x)e^{3x}$ مع p دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة.

✓ الحل

$p(x)$ من الدرجة الثالثة هنا يعني أن $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

بما أن F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

فإنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $F'(x) = p'(x)e^{3x} + 3e^{3x}p(x) = e^{3x}(p'(x) + 3p(x))$

$= [3ax^3 + (3a + 3b)x^2 + (2b + 3c)x + c + 3d] e^{3x}$

ولدينا من جهة أخرى $F'(x) = f(x)$

بالتطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $a = \frac{1}{3}$ ، $b = -\frac{1}{3}$ ، $c = \frac{2}{9}$ و $d = -\frac{2}{27}$

ومنه $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27} \right) e^{3x}$

تطبيق 21

حساب القيمة المتوسطة لدالة

أحسب القيمة المتوسطة M للدالة f حيث $y = f(x) = \cos^2(\alpha x)$ على المجال $\left[0, \frac{\pi}{\alpha}\right]$

✓ الحل

$$M = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos^2(\alpha t) dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1 + \cos(2\alpha t)}{2} \right) dt = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha t) \right] dt$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha t) \right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

تطبيق 22

تعيين اتجاه تغير دالة أصلية

F دالة معرفة بـ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

(أ) أحسب $F(0)$ ثم $F'(x)$. (ب) ادرس اتجاه تغيرات الدالة F .

✓ الحل

$$F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$$

الدالة $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ مستمرة على \mathbb{R} و بالتالي تقبل دالة أصلية F' قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ولدينا $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(2) بما أنه من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $\frac{1}{1+x^2} > 0$ فإن $F'(x) > 0$

ومنه فإن F متزايدة تماماً على \mathbb{R}

تطبيق 23

حساب التكاملات باستعمال الدالة الأصلية

احسب التكاملات التالية.

$$I = \int_0^1 (t^2 - 3t + 1) dt \quad (\text{أ}) \quad I = \int_0^2 (x-2) dx \quad (\text{ب})$$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} dx \quad (\text{ج}) \quad I = \int_0^1 (2t+1)(t^2+t)^3 dt \quad (\text{د})$$

$$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}} \quad (\text{هـ}) \quad I = \int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx \quad (\text{و})$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x} dx \quad (\text{ي}) \quad I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} dx \quad (\text{ن})$$

الحل

$$I = \left[\frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_0^2 = [2-4] - (0) = -2 \quad (\text{أ})$$

$$I = \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + t \right]_0^1 = -\frac{1}{6} \quad (\text{ب})$$

$$I = \left[\frac{(t^2+t)^4}{4} \right]_0^1 = 4 \quad (\text{ج})$$

$$I = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{2} e^{\ln 9} - \frac{1}{2} e^{\ln 4} = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \quad (\text{د})$$

$$I = \int_0^1 \frac{3}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 u'(x) u^{-2}(x) dx \quad (\text{هـ})$$

$$= \left[\frac{-3}{2u(x)} \right]_0^1 = \left[\frac{-3}{2(x^2+1)} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{2+t}} = \int_0^3 \frac{(2+t)}{\sqrt{2+t}} dt = [2\sqrt{2+t}]_0^3 = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \quad (\text{و})$$

$$I = \int_0^4 \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{3x+4}} dx = \frac{1}{3} \int_0^4 \frac{(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x+4} \right]_0^4 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \quad (\text{ن})$$

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-5}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{5}{x} \right) dx = [x - 5 \ln(-x)]_{-2}^{-1} = 1 + 5 \ln 2 \quad (\text{ي})$$

تطبيق 24

تعيين دالة أصلية باستعمال علاقة شال و مساحة قرص

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}, & x \in [-1, 1] \\ f(x) = \frac{2}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

(1) بين أن منحنى الدالة f على المجال $[-1, 1]$ هو ربع دائرة ثم مثل بيان

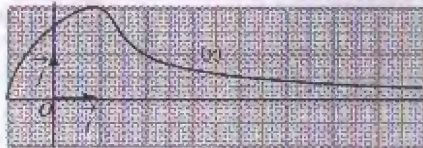
(2) استعمال علاقة شال لحساب التكاملين $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$

$$J = \int_4^{-1} f(x) dx$$

الحل

(1) من أجل كل x من $[-1, 1]$ نضع $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ يتربيع الطرفين نجد

$y^2 = 4 - (x-1)^2$ ومنه نستنتج $(x-1)^2 + y^2 = 4$ إذن النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega(1, 0)$ وطول نصف قطرها $R=2$ وبما أن $x \in [-1, 1]$ و $y > 0$ فإن (γ) هو ربع دائرة



$$I = \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \quad (2)$$

حيث (S) مساحة الدائرة $I = \frac{1}{4} S + 2 [\ln x]_1^3 = \frac{1}{4} \pi \times 4 + 2 \ln 2 = \pi + 2 \ln 2$

$$J = \int_4^{-1} f(x) dx = \int_4^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx$$

$$= [2 \ln(x)]_4^1 - \int_1^{-1} f(x) dx = -2 \ln 4 - \pi$$

تطبيق 25

حساب التكاملات

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (1)$$

(2) احسب $I_2 + I_1$ إذا علمت أن $I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$ ثم استنتج قيمة I_2

✓ الحل

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1} dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \quad \text{أي} \quad I_2 = \frac{1}{2} - I_1 \quad \text{منه نجد} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \\ I_1 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

تطبيق 26

حصر تكامل دالة

(1) مثل الدالة f المعرفة على $[0, 1]$ بـ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (الوحدة 8cm)(جزئ المجال $[0, 1]$ إلى 8 مجالات متساوية الطول).(2) باستعمال طريقة المستطيلات أحصر مساحة الحيز من المستوي تحت منحنى الدالة f ثم احسب سعة هذا الحصر والتي تمثل حاد من الأعلى للفرق بين مساحة المستطيلات الكبرى ومساحة المستطيلات الصغرى

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \quad \text{استنتج حصرًا لـ}$$

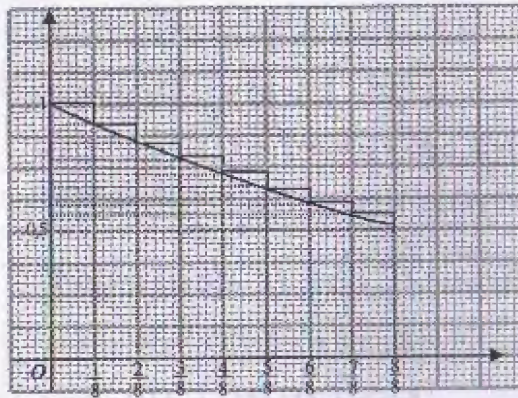
✓ الحل

$$\frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) \geq \mathcal{A} \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k-1}{8}\right) \quad (1)$$

$$\text{ومنه } 314 \times 10^{-15} \geq \mathcal{A} \geq 213,28 \times 10^{-15}$$

$$M = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{8}\right) - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k-1}{8}\right) \approx 1,0072 \times 10^{-13} \quad \text{سعة الحصر هي}$$

$$\text{إذن } 314 \times 10^{-15} \geq \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \geq 213,28 \times 10^{-15}$$



التمثيل
التماني
للدالة f
على المجال
 $[0, 1]$

تطبيق 27

تعيين دالة أصلية باستعمال التكامل بالتجزئة

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة f في كل حالة منالحالات التالية على المجال المعطى والتي تنعدم عند a

$$a=1, I =]0, +\infty[\quad f(x) = (2x+1)\ln x \quad (1)$$

$$a=0, I = \mathbb{R} \quad f(x) = (2x+1)e^x \quad (2)$$

$$a = \frac{\pi}{2}, I = \mathbb{R} \quad f(x) = x \cos x \quad (3)$$

$$a=1, I =]0, +\infty[\quad f(x) = (\ln x)^2 \quad (4)$$

$$a=0, I = \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-2x} \cos x \quad (5)$$

✓ الحل

$$(1) \text{ بوضع } u'(x) = 2x+1 \text{ و } v(x) = \ln x \text{ يكون } u(x) = x^2+x \text{ و } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \int_1^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt$$

$$= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t^2+t}{t} dt = [(t^2+t)\ln t]_1^x - \int_1^x (t+1) dt$$

$$= [(t^2+t)\ln t - \frac{t^2}{2} - t]_1^x = [(x^2+x)\ln x - \frac{x^2}{2} - x] - \left[-\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$F(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt = [e^{-2t} \sin t]_0^x - \int_0^x -2(\sin t)e^{-2t} dt$$

$$= e^{-2x} \sin x + 2 \int_0^x (\sin t)(e^{-2t}) dt$$

نضع $G(x) = \int_0^x (\sin t)e^{-2t} dt$ ونستعمل التكامل بالتجزئة مرة أخرى لتحسين الحالة

$$\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = -2e^{-2t} \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = e^{-2t} \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$G(x) = [(-\cos t)e^{-2t}]_0^x - \int_0^x 2e^{-2t} \cos t dt$$

$$G(x) = -(\cos x)e^{-2x} + 1 - 2F(x)$$

$$F(x) = e^{-2x} \sin x - 2(\cos x)e^{-2x} + 2 - 4F(x) \text{ إذن}$$

$$5F(x) = e^{-2x} \sin x - 2(\cos x)e^{-2x} + 2$$

$$5F(x) = e^{-2x} [\sin x - 2\cos x] + 2$$

$$F(x) = \frac{1}{5} e^{-2x} [\sin x - 2\cos x] + \frac{2}{5}$$

تطبيق 28 حساب التكامل باستعمال التجزئة

نعتبر التكامل التالي $I_{(n,k)} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$ حيث n و k عدنان

طبيعيين غير معدومين و $k \leq n$

(1) أوجد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ ثم استنتج $I_{(n,k)}$ بدلالة n و k

(2) احسب $I_{(3,2)}$ و $I_{(2,1)}$

✓ الحل

(1) لإيجاد علاقة بين $I_{(n,k)}$ و $I_{(n,k-1)}$ نستعمل التكامل بالتجزئة

بوضع $u(x) = x^k$ يكون $u'(x) = kx^{k-1}$

$v(x) = (1-x)^{n-k}$ يكون $v'(x) = -\frac{1}{n-(k-1)}(1-x)^{n-(k-1)}$

$$I_{(n,k)} = -\frac{1}{n-(k-1)} \left([x^k (1-x)^{n-(k-1)}]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx \right) \text{ و عليه}$$

$$= (x^2 + x) \ln(x) - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (2t+1)e^t dt \quad (2)$$

بوضع $v(t) = e^t$ و $u'(t) = 2$ يكون $v'(t) = e^t$ و $u(t) = 2t+1$

$$F(x) = \int_0^x u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t) dt$$

$$= [(2t+1)e^t]_0^x - \int_0^x 2e^t dt = [(2t+1)e^t - 2e^t]_0^x$$

$$= (2x+1)e^x - 2e^x + 1 = e^x(2x-1) + 1$$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) dt \text{ و } f(x) = x \cos x \quad (3)$$

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \sin t \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \cos t \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x u'(t)v(t) dt$$

$$= [t \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt = x \sin x - \frac{x}{2} + [\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^x$$

$$= x \sin x - \frac{x}{2} + \cos x$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{2}{x} \ln x \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases} \text{ بوضع} \quad (4)$$

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x [u'(t)v(t)] dt$$

$$= [t(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x 2 \ln t dt = [t(\ln t)^2]_1^x - [2(t \ln(t) - t)]_1^x$$

$$= [t(\ln t)^2 - 2t \ln(t) + 2t]_1^x = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - 2$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t} \cos t dt \quad (5)$$

$$\begin{cases} u'(t) = -2e^{-2t} \\ v(t) = \sin t \end{cases} \text{ فيكون } \begin{cases} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \cos t \end{cases} \text{ بوضع}$$

$$I(n, k) = \frac{k}{n-(k-1)} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-(k-1)} dx = \frac{k}{n-(k-1)} I(n, k-1)$$

$$I(n, k) = \frac{k}{n-(k-1)} I(n, k-1) = \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} I(n, k-2)$$

$$= \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} \cdot \frac{k-2}{n-(k-3)} I(n, k-3)$$

$$= \frac{k}{n-(k-1)} \cdot \frac{k-1}{n-(k-2)} \cdot \frac{k-2}{n-(k-3)} \cdots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} I(n, 0)$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n, 0)$$

$$I(n, k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} I(n, 0) \quad \text{إذن}$$

$$I(n, 0) = \int_0^1 (1-x)^n dx = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \text{لكن}$$

$$I(n, k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{1}{n+1} \quad \text{وبالتالي}$$

$$I(5, 2) = \frac{1}{60} \quad \text{و} \quad I(2, 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (2)$$

تطبيق 29

حساب مساحة حيز من المستوى

$$g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \quad \text{بـ} \quad]0, +\infty[$$

$$g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad (1) \quad \text{بين أن}$$

ماهي المستقيمات القارية لنحنى الدالة g (2) احسب مساحة حيز المستوى المحدود بمنحنى g والمستقيمات التيمعادلاتها $y=x+2$ و $x=4$ و $x=m$ مع $m > 4$.عين نهاية هذه المساحة لـ $m \rightarrow +\infty$

الحل ✓

(1) من أجل كل $x \neq 1$ لدينا

$$x+2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لنحنى الدالة g .بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x+2) = 0$ فإن المنحنى له مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.(2) من أجل كل $x > 4$ لدينا $g(x) - (x+2) > 0$ ومنه المنحنى (γ) للدالة g يقع فوق المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+2$.وعليه فالمساحة بين (γ) و (Δ) هي $S = \int_4^m [g(x) - (x+2)] dx$

$$S = \int_4^m \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left[3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_4^m$$

$$= \left(3 \ln(m-1) - \frac{1}{m-1} - 3 \ln 3 + \frac{1}{3} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S = +\infty$$

تطبيق 30

حساب مساحة حيز من المستوى

$$f(x) = \frac{1}{x} (1 + \ln x) \quad \text{بـ} \quad]0, +\infty[$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

$$\|\vec{i}\| = 3 \text{ cm} \quad \text{حيث} \quad (0, \vec{i}, \vec{j})$$

(2) عين m فاصلة نقطة تقاطع (γ) مع محور الفواصل(3) ليكن S_1 الحيز المحصور بين (γ) و محور الفواصل والمستقيمين ذويالمعادلتين $x=1$ و $x=4$ وليكن S_2 الحيز المحصور بين (γ) و محورالفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=1$ و $x=a$ مع $a > 1$ عين a بحيث أن الحيزين S_1 و S_2 لهما نفس المساحة.

الحل ✓

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times \infty \quad \text{عدم التعيين}$$

تطبيق 31 حساب المساحة بين منحنيين ومحور الفواصل

تطبيق 31

1) ادرس تغيرات الدالتين $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = (x+1)e^{-x}$ في معلم متعامد ومتجانس طول الوحدة 1 cm
 2) تعتبر المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = m$ مع $m > 0$ باستعمال التكامل بالتجزئة احسب بدلالة m المساحة $S(m)$ لحيز المستوي المحدود بين (x, x') والمستقيم (Δ) والمنحنيين (C_f) و (C_g)
 3) ماهي نهاية هذه المساحة لـ m يؤول إلى $(+\infty)$

الحل

- (1) دراسة تغيرات f :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $f'(x) = -e^{-x}$
 من أجل كل x من \mathbb{R} يكون $f'(x) < 0$
 وبالتالي فإن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها
 دراسة تغيرات g :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x e^{-x}) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1+x) = -\infty$
 الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $g'(x) = -x e^{-x}$
 $g'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$
 إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) < 0$ وإذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة g'		+	-
تغيرات g		↗ 1 ↘	0

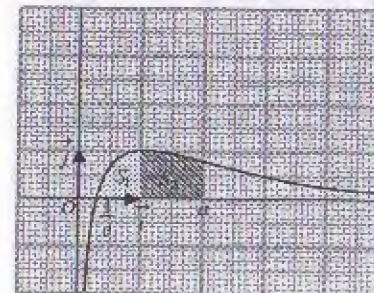
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

(C_g) يقطع (x, x') في النقطة $A(-1, 0)$

$$S(m) = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^m f(x) dx \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

$$f(x) = \frac{-\ln x}{x^2} \quad \text{ولدينا} \quad] 0, +\infty[$$



$f'(x) = 0$ يكافئ $\ln x = 0$ يكافئ $x = 1$
 إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	-
تغيرات f		↗ 1 ↘	0

(2) فاصلة نقطة التقاطع (p) مع (x, x') هي حل للمعادلة $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \quad \text{يكافئ} \quad 1 + \ln x = 0 \quad \text{يكافئ} \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{إذن} \quad m = \frac{1}{e}$$

$$S_1 = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t} \right) dt = \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \quad (3)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right) \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{وحدة المساحة})$$

$$\text{إذن} \quad S_1 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2$$

$$S_2 = \left[\ln t + \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^a = \ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2$$

$$S_2 = 9 \left[\ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2 \right] \text{ cm}^2$$

$$2 \ln(a) + (\ln(a))^2 = 1 \quad \text{يكافئ} \quad 9 \left[\ln a + \frac{1}{2} (\ln a)^2 \right] = \frac{9}{2} \quad S_2 = S_1$$

$$\text{بوضع} \quad \ln(a) = \alpha \quad \text{نجد} \quad \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\alpha_2 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \alpha_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{لها حلان} \quad (*) \quad \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

الحالة الأولى $\alpha = \alpha_1$

$$\ln a = \alpha_1 \quad \text{يكافئ} \quad a = e^{-1+\sqrt{2}}$$

الحالة الثانية $\alpha = \alpha_2$

$$\ln a = \alpha_2 \quad \text{يكافئ} \quad a = e^{-1-\sqrt{2}} \quad \text{مرفوض إذن قيمة} \quad \alpha \quad \text{الطلوبة هي} \quad e^{-1+\sqrt{2}}$$

✓ الحل

(1) $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ فإن $y = x - 2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) لدينا $f(x) - (x - 2) = e^{1-x}$

من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $e^{1-x} > 0$ ومنه فإن للنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) بما أن النحنى (C_f) يقع فوق (Δ) فإن المساحة S_1 هي

$$S_1 = \int_0^{\lambda} [f(x) - (x - 2)] dx = \int_0^{\lambda} e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^{\lambda} = -e^{1-\lambda} + e$$

$$B(\lambda, e^{1-\lambda}), A(\lambda, 0) \quad (3)$$

المماس لـ (C_g) عند B معادلته $y = -e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda}$ فاصلة نقطة تقاطع المماس مع (x, x') هي حل للمعادلة $-e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda} = 0$ $-e^{1-\lambda}(x - \lambda) + e^{1-\lambda} = 0$ يكافئ $\lambda e^{1-\lambda} + e^{1-\lambda} = x e^{1-\lambda}$ $x = \lambda + 1$ يكافئ $C(\lambda + 1, 0)$ منه

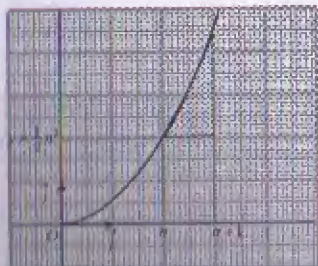
مساحة المثلث ABC هي $S_2 = \frac{e^{1-\lambda}}{2}$

ومنه $S_1 + 2S_2 = -e^{1-\lambda} + e + e^{1-\lambda} = e$ مستقل عن λ

تطبيق 33 حساب المساحات

تطبيق 33

(γ) جزء من قطع مكافئ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2$ مع $x \geq 0$ n عدد طبيعي و U_n مساحة حيز المستوي المحدب (γ) والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = n+1$ و $y = \frac{1}{2}n^2$ بين ان التتالية (U_n) حسابية

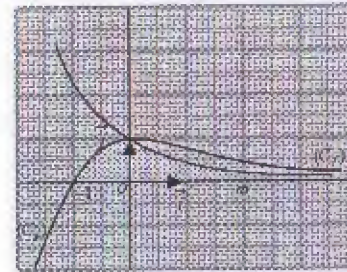


✓ الحل

$$U_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}n^2 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}n^2x \right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)^3 - \frac{1}{2}n^2(n+1) - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

بما أن $U_n = an + b$ فإنها حسابية أساسها النصف وحدها الأول السدس



$$= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^m e^{-x} dx$$

$$\int_0^m e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^m = -e^{-m} + 1$$

نحسب $\int_{-1}^0 g(x) dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة.

بوضع $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$ يكون $\begin{cases} u(x) = x + 1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 u(x)v'(x) dx = [-e^{-x}(x+1)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^{-x} dx$$

$$= [-e^{-x}(x+1)]_{-1}^0 = (-1)(1) - (-e)(-1) = -2 + e$$

$$S(m) = -2 + e - e^{-m} + 1 = -e^{-m} + e - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (-e^{-m} + e - 1) = e - 1 \quad (3)$$

تطبيق 32 حساب المساحات

تطبيق 32

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = (x-2) + e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

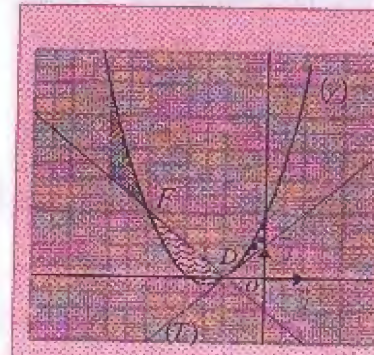
(1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم حدد الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) λ عدد حقيقي موجب، نعتبر حيز المستوي المحدب بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 0$ عمر عن S_1 مساحة هذا الحيز بدلالة λ .

(3) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ $g(x) = e^{1-x}$ A نقطة إحداثياتها $(\lambda, 0)$ و B نقطة من (C_g) فاصلتها λ المماس لـ (C_g) عند B يقطع محور الفواصل في نقطة C . احسب إحداثيات C ثم S_2 مساحة المثلث ABC . بين أن $S_1 + 2S_2$ مستقل عن λ .

تطبيق 34

حساب المساحات



(γ) قطع مكافئ معادلته $y = x^2 + 3x + 2$

(1) اكتب معادلة المماس (T) لـ (γ) عند النقطة $D(-1, 0)$

(2) أعط معادلة المستقيم (DF) حيث $F(-3, 2)$

(3) احسب المساحة الملونة في الشكل

الحل

(1) دالة القطع المكافئ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا $y' = f'(x) = 2x + 3$ ومنه $f'(-1) = 1$ إذن $f(-1) = 1$

(2) $y = ax + b$ (DF)

(1) ... $-a + b = 0$ تكافئ $D \in (DF)$

(2) ... $-3a + b = 2$ تكافئ $F \in (DF)$

من (1) و (2) نجد $a = -1$ و $b = -1$ منه $(DF), y = -x - 1$

(3) على المجال $[-4, -3]$ المنحني يقع فوق (DF)

و على المجال $[-3, -1]$ المنحني يقع تحت (DF)

و على المجال $[-1, 0]$ المنحني يقع فوق (T) و عليه

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{-3} (-y_{(DF)} + f(x)) dx + \int_{-3}^{-1} (y_{(DF)} - f(x)) dx + \int_{-1}^0 (f(x) - y_{(T)}) dx \\ &= \int_{-4}^{-3} (x^2 + 4x + 3) dx + \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{64}{3} - 20 + \frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{3} = \frac{64 - 60 + 1 + 9 + 1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

إذن $S = 5$ وحدة مربعة.

تطبيق 35

حساب مساحة القطع الناقص والدائرة

(1) بين أن مساحة ربع قرص مركزه النقطة O ونصف قطره a مع $a > 0$ موجود في الربع الأول من المستوى للنسب إلى معلم متعامد و متجانس هي

$$A_D = \frac{\pi}{4} a^2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

(2) ليكن (E) قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مع $a > 0$ و $b > 0$

احسب المساحة A_E للقطع الناقص

الحل

(1) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها a معادلته $x^2 + y^2 = a^2$

ومن $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ إذن مساحة ربع القرص تساوي ربع مساحة القرص أي $\frac{1}{4} \pi a^2$

و من جهة ثانية هذه المساحة تمثل مجموعة النقط M المعرفة بـ

$$A_D = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ أي } \sqrt{a^2 - x^2} \geq y \geq 0 \text{ و } a \geq x \geq 0$$

(2) مساحة القطع الناقص تساوي $4S_1$

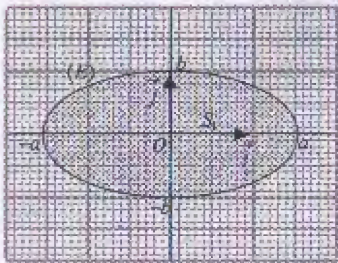
و هذا سبب التناظرات الموجودة في هذا الشكل

S_1 هي مجموعة النقط $M(x, y)$ بحيث

$$b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \geq y \geq 0 \text{ و } a \geq x \geq 0$$

$$A_E = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \times \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$



تطبيق 36

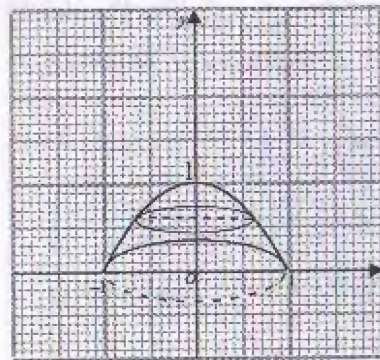
حساب حجم المخروط الدوراني

في معلم للفضاء نعلم للمخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $S(0, 0, 4)$ و

قاعدته دائرة مركزها النقطة O ونصف قطرها 2 من المستوى (xoy)

نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $Z = a$ حيث $4 \geq a \geq 0$

(1) عين نصف قطر الدائرة الناتجة من تقاطع المخروط والمستوي ذي المعادلة



الحل

طبيعة مقطع من (Σ) هي دائرة

معادلة المستوي القاطع لـ (Σ)

هي $y=a$ مع $1 \geq a \geq 0$

مساحة المقطع الناتج من تقاطع (Σ)

مع المستوي $y=a$

هي πr^2 مع $r^2=1-a$ أي $\pi(1-a)$

$$V = \int_0^1 \pi(1-a) da = \left[\pi \left(a - \frac{a^2}{2} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 (1-y) dy = \frac{\pi}{2} \quad \text{طريقة (2)}$$

حساب حجم مجسم دوراني

f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ وتمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

(1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة I حيث $I = \int_1^e \ln x dx$

(2) H دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ $H(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2 - \frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x}$

بين أن H دالة أصلية لـ h حيث $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

(3) نعتبر في المعلم المتعامد والمتجانس للفضاء $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المجسم S الذي

يحصل عليه بتدوير حول (O, \vec{i}) حيز المستوي المحدد باللمحني (γ) والمستقيمين

ذوي المعادلتين $x=e$ و $x=1$ احسب حجم (S) وليكن V .

الحل

$$I = [x \ln x - x]_1^e = (e - e) - (-1) = 1$$

$Z=a$ بدلالة a ثم عين مساحة قرص التقاطع.

(2) استنتج حجم هذا الخروط بواسطة التكامل ثم احسبه بدلالة الدستور

حيث $\frac{1}{3} \pi R^2 h$ نصف قطر دائرة القاعدة و h الارتفاع.

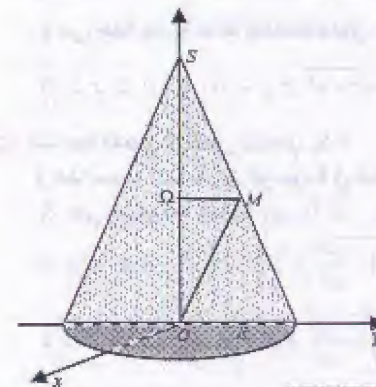
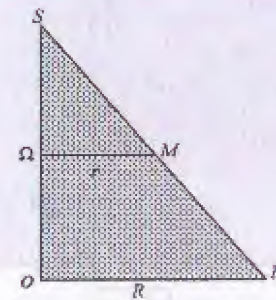
الحل

(1) نصف قطر الدائرة هو ΩM

حسب نظرية طاليس لدينا $\frac{O\Omega}{OS} = \frac{OM}{OB}$ ومنه ،

$$r = \Omega M = \frac{OB \times O\Omega}{OS} = \frac{R \times a}{4} = \frac{aR}{4}$$

مساحة القرص هي πr^2 أي $\pi \frac{a^2 R^2}{16}$



$$V = \int_0^4 \pi \frac{a^2 R^2}{16} da$$

$$= \frac{\pi R^2}{16} \int_0^4 a^2 da = \frac{\pi R^2}{16} \left[\frac{a^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \frac{\pi R^2 \times 64}{16 \times 3} = \frac{4}{3} \pi R^2$$

لدينا $h=4$ و $V = \frac{\pi R^2}{3} h$

ومنه $V = \frac{4\pi R^2}{3}$

حساب حجم مجسم دوراني

تطبيق 37

في معلم متعامد ومتجانس (p) قطع مكافئ معادلته $z = x^2$ ممثل في المجال $[-1, 1]$

بتدوير (p) حول محور الزايب يولد مجسما دورانيا (Σ)

ماهي طبيعة مقطع من (Σ) بمستوي عمودي على (O, \vec{i}) ثم عبر بدلالة a

حيث $1 \geq a \geq 0$ عن مساحته $S(a)$ ثم احسب حجم (Σ) .

$$H'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 - \frac{2}{2x} \ln x + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \ln x - \frac{2}{2x} = \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 = h(x) \quad (2)$$

ومن هنا الدالة H أصلية للدالة h

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e (f(x))^2 dx = \pi \int_1^e \left[x^2 + \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 + 2 \ln x \right] dx \quad (3) \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e + \pi \left[H(x) \right]_1^e + 2\pi = \pi \left[\left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{-1}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} \right) + 2 \right] \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right] \quad (\text{وحدة الحجم}) \\ V &= \pi \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right) (2 \text{ cm})^3 = 8\pi \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{3}{e} + \frac{2}{3} \right) \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

حساب حجم جسم دوراني

تطبيق 39

(r) قوس المنحني ممثل على $[\alpha, \beta]$ لدالة من الشكل $f(x) = \sqrt{p(x)}$ حيث $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية موجب تماما على $[\alpha, \beta]$. ان تدوير (r) حول (Ox) يولد مجسما دورانيا نريد تعيين حجمه. لكن B_1 و B_2 مساحتي قاعدتي هذا المجسم و B_3 مساحة مقطع مجسم بالستوي العمودي على (x, x') و يبعد بنفس المسافة عن مستوي القاعدتين و ليكن $h = \beta - \alpha$

$$(1) \text{ بين ان } V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3)$$

(2) ارتفاع خزان ماء هو 48 m نصف قطري قاعدتيه هما R_2 و R_1 نعتبر ان حجمه هو حجم مجسم دوراني المولد بتدوير حول (x, x') الحيز المحدد بالمنحني (r) الذي معادلته $y = 12 \sqrt{1 + \frac{x^2}{24^2}}$ و المستقيمان التي معادلتهما $x = -36$ و $x = 12$ و (x, x') احسب حجم هذا المجسم.

الحل :

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 + bx + c) dx = \pi \left[\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \left[\frac{1}{3} a \beta^3 + \frac{1}{2} b \beta^2 + c \beta - \frac{1}{3} a \alpha^3 - \frac{1}{2} b \alpha^2 - c \alpha \right] \pi \\ &= \left[\frac{1}{3} a (\beta^3 - \alpha^3) + \frac{1}{2} b (\beta^2 - \alpha^2) + c (\beta - \alpha) \right] \pi \\ &= (\beta - \alpha) \left[\frac{a}{3} (\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + \frac{b}{2} (\alpha + \beta) + c \right] \pi \\ &= \pi \left(\frac{\beta - \alpha}{6} \right) [2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c] \\ &= \frac{h}{6} [2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c] \pi \end{aligned}$$

ولدينا $B_1 = \pi (a\alpha^2 + b\alpha + c)$ و $B_2 = \pi (a\beta^2 + b\beta + c)$

$$B_3 = \pi \left[a \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + c \right]$$

$$B_1 + B_2 + 4B_3 = 2a(\beta^2 + \alpha \beta + \alpha^2) + 3b(\alpha + \beta) + 6c$$

$$V = \frac{h}{6} (B_1 + B_2 + 4B_3) \quad \text{اذن}$$

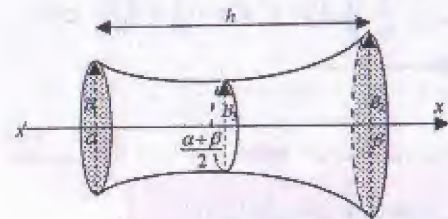
$$(2) \quad \alpha = -36 \quad \text{و} \quad \beta = 12$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -12 \quad \text{و}$$

$$B_1 = \pi \times 468 \quad \text{و} \quad B_2 = \pi (180)$$

$$\text{و} \quad B_3 = 180\pi \quad \text{و} \quad h = 48$$

$$\text{اذن} \quad V = \frac{48}{6} (4 \times 180\pi + 180\pi + 468\pi) = 8\pi (4 \times 180 + 180 + 468) = 10944\pi$$



حساب التكامل بتبديل المتغير

تطبيق 40

$$\text{نريد حساب التكامل } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(1) \text{ اثبت انه من اجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ يكون } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$(2) \text{ باستعمال تبديل المتغير احسب } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

الحل:

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{إذن}$$

(2) بوضع $x = \cos t$ يكون $dx = -\sin t dt$

$$t = \frac{\pi}{3} \quad \text{فإن} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ولما} \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن} \quad x = 0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{1-\cos^2(t)} \sin t dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \sqrt{\sin^2(t)} dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t |\sin t| dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t) dt = -\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \text{إذن}$$

تطبيق 41 دراسة تقارب المتتاليات المعرفة بواسطة التكامل

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \quad \text{نضع} \quad n \geq 1$$

(1) احسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد I_1

$$(ب) \text{ بين أنه من أجل كل } n \geq 1 \text{ يكون } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

(ج) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n \quad \text{نكون } n \geq 1$$

(2) تعتبر المتتالية الحقيقية (a_n) المعرفة بـ $a_1 = 0$ و من أجل كل عدد

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n \geq 1$$

برهن بالزواج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معلوم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e} \quad \text{نم استنتج} \quad a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$$

الحل:

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{-x} dx \quad (1)$$

$$\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \text{منه نجد} \quad \begin{cases} u(x) = 1-x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$I_1 = \int_0^1 u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$$

$$= [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= [(x-1)e^{-x} + e^{-x}]_0^1 = [xe^{-x}]_0^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(ب) من أجل كل عدد حقيقي x من $[0, 1]$ لدينا $0 \leq 1-x \leq 1$ منه $0 \leq (1-x)^n \leq 1$ وبضرب طرفي المتباينة في e^{-x} نجد $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{أي} \quad 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \quad \text{وحسب نظرية الحصر فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \quad (ج)$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} u'(x) = (1-x)^n \\ v(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{بوضع}$$

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 u'(x) v(x) dx = \frac{1}{n!} \left([u(x) v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) v'(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\left[-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} \right) e^0 - \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - I_{n+1}$$

إذن $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{(n+1)!}$

(2) $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ و $a_1 = 0$

إثبات أن $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

نسمي p_n الخاصية " $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ "

من أجل $n=1$ لدينا $a_1 = \frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$ منه p_1 صحيحة.

نفرض أن p_n صحيحة من أجل عدد طبيعي كافي $n \geq 1$ أي $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ و

نبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} \left[-I_n + \frac{1}{(n+1)!} \right] = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

منه p_{n+1} صحيحة و بالتالي p_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم.

(ب) بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$

دراسة تقارب متتالية

تطبيق (2)

f دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(1) ادرس تغيرات f على $]0, +\infty[$

(2) α عدد حقيقي موجب تماماً، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب

$$\int_1^{\alpha} f(t) dt \quad \text{ثم} \quad \int_1^{\alpha} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

(3) k عدد طبيعي غير معلوم.

(أ) بين أن $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

(ب) برهن أن $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$ ثم استنتج

$$0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

(4) تحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ يكون

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

(ب) نضع من أجل كل $n \geq 1$

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة (1) اعط عبارة مختصرة لـ S_n ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون:

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$$

ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)]$

(5) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معلوم n

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

(أ) تحقق باستعمال السؤال 3 فرع ب أن:

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

(ب) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1 + x \ln(x)) - \ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I و لدينا

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x-1+x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)}$$

من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$

ومنه f متناقصة تماماً على I .

(4) $\{1\}$ من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ لدينا $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} \quad (\text{B})$$

$$S_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$$

منه (S_p) متتالية مقاربة نحو العدد 0.

(ج) لدينا $\frac{1}{n(n+1)} \geq f(n) \geq 0$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq f(n+1) \geq 0$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \geq f(2n) \geq 0$$

بجمع أطراف التباينات طرفاً لطرف نجد $S_n \geq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \geq 0$

بما ان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ و حسب نظرية الحصر فان $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = 0$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (5)$$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n) \quad (1)$$

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بجسم أطراف التباينات طرفاً لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - (f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n))$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = U_n - (f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n))$$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx \quad \text{منه نجد}$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx = [Ln x]_n^{2n+1} = Ln(2n+1) - Ln(n) = Ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \text{ لكن}$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

$$I_a = \int_1^a \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx \quad (2)$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x(x+1)} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{نجد}$$

$$I_a = \int_a^x u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^x - \int_a^x \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$= \left[x \operatorname{Ln} \left(\frac{x}{x+1} \right) - \operatorname{Ln} (x+1) \right]^{\alpha},$$

$$= \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - \ln(\alpha+1) + 2 \ln(2)$$

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{t} dt + \int_a^x \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \int_a^x \frac{1}{t} dt + I_a$$

$$= Ln(\alpha) + I_{\alpha} = (\alpha + 1) Ln\left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right) + 2 Ln(2)$$

(3) من أجل كل x من $[k, k+1]$ يكون $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ بالمرور إلى التكامل نجد

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} (k+1-k) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k+1} (k+1-k)$$

$$\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \quad \text{ب) لدينا}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [Ln(x)]_k^{k+1} = Ln(k+1) - Ln(k) = -Ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k) \quad \text{چونکه}$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_1^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \quad \text{البيان.}$$

و عليه نجد $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} - f(k) \leq \frac{1}{k}$ بإضافة $-\frac{1}{k}$ إلى أطراف المتباينة الأخيرة نجد

$$(-1) \text{ بالضرب في } -\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \leq -f(k) \leq 0$$

نجد $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k(k+1)}$ اي $0 \leq f(k) \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = U_n - L_n(2) - L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

(ب) لدينا من السؤال (5)

$$U_n = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) + \left[L_n(2) + L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L_n(2)$$

و هذا يعني ان المتتالية (U_n) متقاربة نحو $L_n(2)$.

تطبيق 43

دراسة تقارب متتالية معرفة بواسطة التكامل

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{\pi}^{4n\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$$

(1) احسب I_0 باستعمال التكامل بالتجزئة.

(2) برهن ان المتتالية (I_n) هندسية يطلب تعيين اساسها.

(3) نضع $S_n = \sum_{k=0}^n I_k$. احسب S_n . ثم عين نهاية للمتتالية (S_n) .

الحل

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \cos \frac{x}{2} \end{cases} \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \end{cases} \quad \text{نجد}$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} x \cos \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left([u(x)v(x)]_{\pi}^{4\pi} - \int_{\pi}^{4\pi} u'(x)v(x) dx \right)$$

$$= \left[x \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} - \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4\pi} 2 \sin \frac{x}{2} dx$$

$$= \left[x \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} + \left[2 \cos \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4\pi} = 4 - \pi$$

$$I_n = \frac{1}{2^n} I_0 \quad \text{منه} \quad I_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2} \int_{\pi}^{4n\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} I_0 = \frac{1}{2^n} \times I_0 \times \frac{1}{2} = I_n \times \frac{1}{2}$$

(3) منه (I_n) متتالية هندسية اساسها $r = \frac{1}{2}$

$$S_n = \sum_{k=0}^n I_k = I_0 + I_1 + \dots + I_n = I_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = (4-\pi) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2(4-\pi) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2(4-\pi)$$

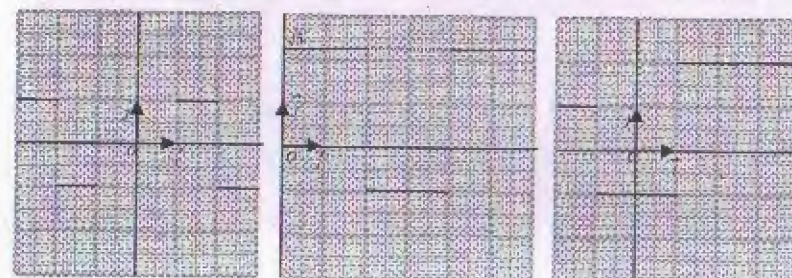
تمارين ومسائل



1- مثل الدوال الدرجية f العطاة ثم احسب التكامل $I(f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

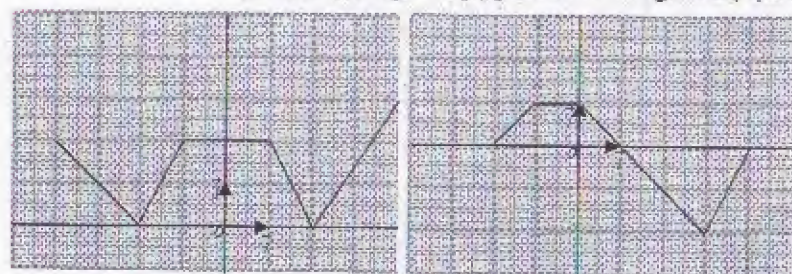
$$(1) \begin{cases} f(x) = 5, & 1 \leq x \leq -3 \\ f(x) = -4, & 3 > x \geq 1 \end{cases} \quad (ب) \begin{cases} f(x) = -\sqrt{2}, & \sqrt{5} \geq x \geq -\sqrt{5} \\ f(x) = -2, & 2\sqrt{5} > x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

2- كل شكل من الأشكال التالية يمثل التمثيل البياني للدالة درجية f ، عين عبارة $f(x)$ على كل مجال ثم احسب التكامل $I(f)$ على مجال تعريف الدالة f .



3- في كل شكل من الأشكال التالية، الدالة القافية بالقطع f ممثلة بالمنحنى العطى

احسب باستعمال المساحات التكامل $I(f)$ على مجال تعريف f .



4- f و g دالتان معرفتان على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ و $g(x) = 5 - x$

(أ) ارسم (C_f) و (C_g) على المجال $[-5, 7]$ في معلم متعامد ومتجانس.

(ب) باستعمال حساب المساحات، احسب التكاملات التالية:

$$\int_0^7 f(x) dx, \int_{-4}^0 f(x) dx, \int_0^7 g(x) dx, \int_0^4 g(x) dx$$

5- (1) نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{4-x^2} + 1$ على المجال $[-2, 2]$ بين أن التمثيل

البياني للدالة f على المجال $[-2, 2]$ في معلم متعامد ومتجانس هو نصف دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) باستعمال المستور الذي يعطي مساحة قرص، احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-2}^0 f(t) dt, \int_0^2 f(t) dt, \int_{-2}^2 f(t) dt$$

6- لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $[0, 5]$ بـ:

$$\begin{cases} g(x) = -x + 3, & 1 \leq x \leq 0 \\ g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, & 5 \geq x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = x + 2, & 1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = -x + 2, & 2 \geq x \geq 1 \\ f(x) = x - 4, & 5 \geq x \geq 2 \end{cases}$$

(1) احسب تكامل كل من f و g على المجال $[0, 5]$

(2) استنتج التكاملين على $[0, 5]$ للدالتين $f + 2g$ و $-2f + g$

7- في معلم متعامد و متجانس ارسم على المجال $[0, 1]$ التمثيل البياني لكل من الدالتين

$$x \rightarrow \sqrt{x}, \quad x \rightarrow x^2$$

إذا علمت أن $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$ احسب $\int_0^1 x^2 dx$ باستعمال التناظر المحوري.

8- إذا علمت أن $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ احسب باستعمال التناظرات العروضة للمنحنى ذي

المعادلة $y = \sin x$ التكاملات التالية:

$$H = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x dx, \quad K = \int_0^{2\pi} \sin x dx, \quad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

9- من أجل كل قضية من القضايا التالية، بين إن كانت صحيحة أو خاطئة، وفي حالة

هذه الأخيرة بين بمثال يبين ذلك.

لتعتبر الدالة f المعرفة والمستمرة على \mathbb{R}

16 - باستعمال نظرية حصر القيمة المتوسطة للدالة $x \rightarrow \cos x$ على المجال $[x, y]$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

بين أن بطريقتين

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

17 - (1) باستعمال دستور المكاملة بالتجزئة مرتين احسب $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$

(2) لتكن f دالة معرفة على $[0, 3]$ بالعلاقة $f(x) = x e^{-x}$ و (y) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس، طول الوحدة 4 cm ، وليكن S الجسم المحصل عليه بالتدوير حول $(x'x')$ للمنحنى ذو المعادلة $y = f(x)$ ، عبر عن V بدلالة I ثم حدد قيمة مقربة لـ V حجم هذا الجسم إلى 1 cm^3

18 - نريد حصر التكامل $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{1 + e^x} dx$

(1) لتكن g دالة معرفة على $[0, 1]$ بـ $g(x) = \ln(1 + e^x)$ و (y) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) ، نقطة من (y) فاصلتها معلومة و B نقطة من (y) فاصلتها 1

(أ) ادرس تغيرات الدالة g ثم عين معادلة المماس لـ (y) في النقطة A

(ب) نقطة تقاطع المماس في A مع القطعة $[AB]$ حيث $I(1, 0)$

احسب مساحة كل من الشكلين $OIPA$ و $OIBA$

(2) نقبل أن المنحنى (y) محصور بين القطعتين $[AP]$ و $[AB]$ ، بين أن

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}$$

(3) باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن J بدلالة $\int_0^1 g(x) dx$ ثم استنتج حصر لـ J

19 - عين الدالة الأصلية للدالة f على المجال المعطى باستعمال الدساتير الشهيرة:

$$I =]3, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{3}{2x-6} \quad (2) \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} \quad (1)$$

$$I =]0, \frac{\pi}{2}[\text{ و } f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (4) \quad I =]-1, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{2x^2}{x^3+1} \quad (3)$$

$$I =]0, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-x} \quad (6) \quad I =]0, +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \quad (5)$$

$$I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} \quad (8) \quad I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = -5e^{-4x+3} \quad (7)$$

$$\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx \quad (1)$$

(2) إذا كان $f \geq 0$ على \mathbb{R} من أجل كل عدد حقيقي t يكون $\int_0^t f(x) dx \geq 0$

(3) إذا كان $\int_0^2 f(x) dx$ موجب فإن f موجبة على $[0, 2]$

10 - نعتبر الدالتين f و g مستمرتين على المجال $[2, 4]$ و بحيث:

$$-3 \leq f(x) \leq 4 \quad \text{و} \quad -1 \leq g(x) \leq 5$$

(1) اعط حصرًا للدالة $f+g$ ثم $3f-g$ على هذا المجال.

(2) اعط حصرًا لكل من التكاملين التاليين:

$$\int_2^4 (3f(x) - g(x)) dx \quad , \quad \int_2^4 (f(x) + g(x)) dx$$

11 - بين المتباينات التالية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t^2) dt \leq 2 \quad \text{بـ} \quad \int_1^2 \frac{1}{1+x} dx \leq \frac{1}{2} \quad \text{بـ} \quad \int_1^3 \ln t dt \geq -\frac{2}{3} \ln 3 \quad (1)$$

12 - احسب حجم الجسم المولد بالدوران حول المحور $(x'x')$ للمساحة المحصورة بين

$$\text{المنحنيين ذوي المعادلات } y = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } y = \frac{1}{x} \text{ و } 1 \leq x \leq e$$

13 - احسب حجم الجسم المولد بتدوير حول $(x'x')$ للمساحة المحصورة بين المنحنيين ذوي

$$\text{المعادلة } y = \sqrt{x} \text{ و } y = x^2 \text{ و } x \geq 0$$

14 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^2 x dx$

$$\text{بين } 0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \quad \text{و} \quad (I_n)$$

15 - من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ بين أن $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

يمكنك استعمال حصر الدالة f المعرفة بـ $f(t) = \frac{1}{1+t}$ على المجال $[0, x]$

2- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون
 $f(x) = a f'(x) + b f''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

25- نضع $F(x) = \int_0^x \frac{-3}{\sqrt{t^2+5}} dt$

(1) احسب $F(0)$ ، ثم احسب $F'(x)$
 2- ادرس تغيرات الدالة F ثم شكل جدول تغيراتها وعين إشارة $F(x)$

26- نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) dx}{1+2\sin x}$

احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ و $I+J$ ثم استنتج قيمة I .

27- f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = (2-x)e^x$
 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ ثم استنتج

قيمة التكامل $\int_0^1 f(t) dt$

28- نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}$

احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

29- نضع $f(t) = \int_0^t \frac{2x}{(x^2-1)^2} dx$ مع $t \in [0, 1]$

احسب التكامل $\int_0^1 f(t) dt$ ثم عين نهاية $f(t)$ لـ t يؤول إلى 1 بقيم صغرى.

30- لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = x^2 + 2x$
 احسب التكاملين $I = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$ و $J = \int_{-1}^2 (x^2 + 2|x|) dx$

31- احسب قيمة I باستعمال التكامل بالتجزئة في كل حالة من الحالات التالية:

(1) $I = \int_1^2 t \ln t dt$ ، (2) $I = \int_0^{\pi} (t-2) \cos t dt$

(9) $f(x) = \cos x - x \sin x$ و $I = \mathbb{R}$

(10) $f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$ و $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

(11) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ و $I =]0, +\infty[$

(12) $f(x) = \tan x + x \tan^3 x$ و $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

20- u و v دالتان معرفتان على $I =]0, \frac{\pi}{4}[$ بـ $u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

(1) تحقق أنه من أجل كل x من I يكون $u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

(2) أوجد دالة أصلية لـ v على I التي تنعدم عند الصفر.

(مشتق الدالة $x \rightarrow \tan(x)$ هي الدالة $x \rightarrow 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$)

21- في كل ما يلي f دالة ناطقة معرفة على مجال معطى بين أن $f(x)$ تكتب على الشكل
 المعطى، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f .

(1) $I =]-3, +\infty[$ ، $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$ ، $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$

(2) $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ ، $f(x) = a + \frac{b}{4x+2}$ ، $f(x) = \frac{3x+5}{4x+2}$

(3) $I =]-2, +\infty[$ ، $f(x) = a + b + \frac{c}{x+2}$ ، $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$

(4) $I =]-2, +\infty[$ ، $f(x) = a + b + \frac{c}{(x+2)^2}$ ، $f(x) = \frac{5x^3+4x^2+2x+1}{(x+2)^2}$

22- f و g و h دوال معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \sin x + \cos^3 x$
 $g(x) = \sin^4 x \cos^5 x$ و $h(x) = \cos^2 x \sin^4 x$ عين الدوال الأصلية للدوال المعطاة.

23- f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \cos^4 x$
 1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم عبر عن $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\sin(2x)$
 2- استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على \mathbb{R}

24- f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^{3x} \sin x$
 1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

$$I = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \quad (4) \quad I = \int_0^1 (3t+1)e^{-t} dt \quad (3)$$

$$I = \int_0^1 (3t+1)e^t dt \quad (6) \quad I = \int_0^1 (2t^2-t+1)e^t dt \quad (5)$$

32 لتكن التكاملات K, I, J بحيث

$$J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx \quad I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx \quad K = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x) dx$$

(1) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين بين أن $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$

(2) احسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

(3) بالتعبير عن $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$ بدلالة $\cos(2x)$ أوجد باستعمال K قيمة I و J

33 f دالة معرفة على $[1, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

(1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(2) نضع $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1} dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن $I+J$ بدلالة J ثم استنتج قيمة J

34 من أجل كل $x > 0$ نعتبر التكاملين

$$J_n = \int_0^x (\sin^{2n} t - \cos^2 t) dt \quad I_n = \int_0^x \sin^{2n} t dt \quad \text{مع } n \in \mathbb{N}$$

(1) أوجد علاقة بين J_n, I_n و I_{n+1}

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب J_n بدلالة I_{n+1}

ثم استنتج علاقة تربط بين I_n و I_{n+1}

(3) احسب I_0 ثم بين أنه يمكن حساب I_1 و J_0

35 ليكن المنحنى (γ) ذو المعادلة $y = \sin x$ مع $\pi \geq x \geq 0$ و (Γ) المنحنى ذو المعادلة

$$y = ax^2 + bx + c$$

(1) ارسم (γ) في معلم متعامد ومتجانس. نرسم A إلى النقطة من (γ) بحيث المماس عندها يوازي $(x'x)$.

(2) عين الأعداد a, b, c بحيث (Γ) يمر من المبدأ O ويقبل A كنقطة له، ثم ارسم (Γ) على نفس المجال.

3) نقبل أن القطع المكافئ (Γ) يبقى فوق (γ) على المجال $[0, \pi]$ ، احسب مساحة الحيز المحصور بين هاذين المنحنيين.

36 f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ طول الوحدة 2 cm .

(1) تحقق أن (γ) يقبل النقطة $I(1, 0)$ كمركز تناظر له.

(2) برهن أن (γ) يقبل مستقيم مقارب (d) عند $(+\infty)$ ، ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (γ) .

(3) من أجل كل عدد حقيقي $\lambda \geq 0$ ، $S(\lambda)$ هي المساحة بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (γ) و (d) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$.

(أ) عبر عن $S(\lambda)$ بدلالة λ .

(ب) ما هي النهاية S للمساحة $S(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $(+\infty)$ ؟

(ج) عين العدد الحقيقي λ_0 بحيث لما $\lambda \geq \lambda_0$ يكون $|S - S(\lambda)| \leq 10^{-2}$.

37 في معلم متعامد ومتجانس نعتبر القطع المكافئ (P) ذو المعادلة $y = 16 - x^2$ الرسم على المجال $[-4, 4]$. بتدوير P حول (oy) نحصل على مجسم دوراني (Σ) .

(1) ما هي طبيعة مقطع من (Σ) بمستو عمودي على (oy) ؟

(2) عبر بدلالة y حيث $16 \geq y \geq 0$ عن مساحة هذا المقطع، ثم احسب مساحة (Σ) .

38 (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^t dt$

(1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, 2]$ حيث $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$

(ب) استنتج أن $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

(ج) بين أنه إذا كانت (U_n) تقبل نهاية ℓ فإن $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0, 2]$ $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

ثم استنتج قيمة I حيث $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$

(ب) بين أنه من أجل كل $t \in [0, 2]$ يكون $1 \leq e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ ثم استنتج أن

$I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$ ثم تحقق أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها ℓ .

39 - من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع $I_n = \int_1^e (Ln x)^n dx$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1, e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي

n يكون $0 < (Ln x)^n - (Ln x)^{n+1}$ ثم استنتج أن المتتالية (I_n) متناقصة

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $I_n \geq 0$ ثم استنتج أن المتتالية (I_n) متقاربة

(2) احسب I_1

(ب) برهن باستعمال التكامل بالتجزئة أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

يكون $I_{n+1} = -e(n+1)I_n$ ثم استنتج القيم المضبوطة لـ I_2, I_3, I_4 و

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون

$I_n \leq e(n+1)$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

(ب) ما هي قيمة $(I_n + I_{n+1})$ ؟ ثم استنتج نهاية المتتالية $(n I_n)$

40 - نريد حصر التكامل $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ بواسطة طريقة المستطيلات

(1) ارسم التمثيل البياني للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ على المجال $[0, 3]$

(2) نجزئ المجال $[0, 3]$ إلى n مجال كل منها له نفس الطول حيث $n \geq 1$

(أ) بين أن مجموع مساحات المستطيلات الكبرى يكتب على الشكل: $U_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n} \times 3\right)$

- بين أن مجموع مساحات المستطيلات الصغرى يكتب على الشكل:

$V_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n} \times 3\right)$ حيث (U_n) و (V_n) تعرف متتاليتين من أجل $n \geq 1$

(ب) بين أن $U_n - V_n = \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3^2+1}}\right)$

(ج) بين أن $U_n - V_n < \frac{7}{10n}$

(د) استنتج قيمة n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ يكون $0 < U_n - V_n < 10^{-2}$

وهذا باستعمال السؤال (ج)

(و) أوجد الحصر للتكامل I الموافق للقيمة n_0

41 - من أجل كل x من $]0, +\infty[$ نضع $F(x) = \int_0^x Ln(1+e^{-2t}) dt$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة F

(2) ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. تحقق أنه من أجل كل t من $[1, 1+a]$ يكون

$$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq a \text{ واستنتج أن } \frac{a}{a+1} \leq Ln(a+1) \leq a$$

(3) استنتج من السؤال (2) أن $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$

$$\text{ثم } \frac{1}{2} Ln(2) - \frac{1}{2} Ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

(4) نقبل أنه لا x يؤول إلى $(+\infty)$ فإن نهاية $F(x)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ ℓ بين

$$\text{أن } \frac{1}{2} Ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

(5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n = \int_n^{n+1} Ln(1+e^{-2t}) dt$

برهن أن $0 \leq U_n \leq Ln(1+e^{-2n})$ ثم استنتج أن (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

(6) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

- عبر عن S_n بدلالة n و F ثم بين أن المتتالية (S_n) متقاربة ثم عين نهايتها.

42 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+x+1}$ و $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

(1) بين أن المتتالية (I_n) معرفة جيدا ثم ادرس اتجاه تغير (I_n)

(2) باستعمال الحصر على المجال $[0, 1]$ للدالتين $U: x \mapsto 1+x+x^2$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$

بين أن $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ثم استنتج تقارب المتتالية (I_n)

43 - نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ التكامل $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

(1) احسب I_1 ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ يكون

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) برهن بالتراجع أن $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

44 (ا) نضع من أجل كل $n \geq 1$ ، $U_n = \frac{2^n}{n!}$ احسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم بين أنه من أجل كل

عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ يكون $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

(5) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية (I_n)

(ب) تحقق أن $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

44 - نعتبر الدالتين f و g العرقتين على $I = [0, 1]$ ب $f(x) = -x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$

(1) ادرس تغيرات f ثم ارسم منحنائها البياني على المجال I في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة هو 10 cm) وحدد المماس للمنحنى عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 1.

(2) ارسم المنحنى المثل للدالة g ثم حدد المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

(3) بين أن تكامل f و تكامل g على المجال I متساويين.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال $[0, 1]$ تكافئ $(x-1)(x^2-3x+1)=0$

(5) استنتج أن اللحنين لهما نقطة مشتركة فاصلتها α حيث $0 < \alpha < 1$

(ب) احسب α ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنين

(6) احسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين اللحنين.

45 - لتكن دالة معرفة على $I = [0, +\infty[$ ب $f_0(x) = e^{-x}$ ومن أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما α ، f_α دالة معرفة كما يلي :

$f_\alpha(0) = 0$ و $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ من أجل $x > 0$

(f_α) المنحنى البياني للدالة f_α في معلم متعامد ومتجانس $\left(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ طول الوحدة (4 cm)

(1) ادرس تغيرات الدالتين f_0 و f_1 وارسم (f_0) ، (f_1) في نفس العلم.

(2) نفرض أن $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ ، ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند العدد $x_0 = 0$

(3) ادرس تغيرات f_α

(4) ليكن $\alpha > 0$ ، ادرس الوضع النسبي لـ (f_α) و (f_0) على $[0, +\infty[$

(5) ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث $\beta > \alpha > 0$ ادرس الوضع النسبي لـ (f_α)

بالنسبة إلى (f_β) على $[0, +\infty[$.

(6) برهن أن جميع اللحنيات (f_α) تمر من نقطة ثابتة عينها.

(7) ارسم (γ_c) و $\left(\gamma_{\frac{1}{2}}\right)$ في نفس العلم السابق.

(8) نفرض أن $\alpha > 0$ و لتكن g_α اقتصار الدالة f_α على المجال $[\alpha, +\infty[$.

برهن أن g_α تقبل دالة عكسية g_α^{-1} عين جدول تغيراتها، ثم ارسم بيانها (خذ $\alpha = \frac{1}{2}$).

(9) نضع $\alpha = n$ حيث n عدد طبيعي ولتكن h_n دالة معرفة على I كما يلي :

$$h_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

(ا) احسب $h_0(x)$ و $h_1(x)$ من أجل كل x من $[0, +\infty[$

(ب) بين أنه من أجل كل x من I يكون $h_n(x) = -x^n e^{-x} + n h_{n-1}(x)$

(ج) عين الأعداد الحقيقية a_0, a_1, \dots, a_n بحيث تكون الدالة K_n المعرفة بـ :

$K_n(x) = e^{-x} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$ أصلية للدالة f_n على $[0, +\infty[$.

(د) استنتج عبارة $h_n(x)$ بدلالة x و n .

(هـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = n!$

46 - f_α دالة معرفة كما يلي $f_\alpha(x) = (x-\alpha)[1 - \ln(x-\alpha)]$ ، $x > \alpha$
 $f_\alpha(\alpha) = 0$

وليكن (γ_α) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

(1) ادرس استمرار وقابلية اشتقاق f_α عند $\alpha = x_0$.

(2) ادرس حسب قيم α تغيرات f_α ثم ادرس وجود المستقيمات المقاربة لـ (γ_α) ارسم (γ_0) .

(3) برهن أن جميع اللحنيات (γ_α) هي صورة (γ_0) بواسطة انسحاب يطلب تعيينه.

ثم ارسم (γ_1) و (γ_{-1}) في نفس العلم.

(4) احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (γ_0) والمستقيم ذا المعادلة $y = 2$

والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = e$ حيث $\lambda < e$ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda)$

47 - (1) g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعبارة $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم حدد النهاية عند $(+\infty)$ واستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً α من المجال $[1, +\infty[$ ونحقق أن $2 > \alpha > \frac{7}{4}$

(2) (Γ) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس

(ا) اكتب معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

(ب) (T) يقطع المحور (Ox) في نقطة فاصلتها x_0 ، احسب القيمة المضبوطة لـ x_0 .

V_1 و V_2 هما القيمتين التقريبية بتقريب 10^{-3} لـ x_0 .

باستعمال إشارة $g(V_2)$ و $g(V_1)$ استنتج حصر α بتقريب 10^{-3}
(ج) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{0\}$

$$(II) \quad f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) (وحدة الطول 2 cm)
(1) برهن أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم ادرس اتجاه تغير f واحسب نهاية f عند $(+\infty)$

(2) تحقق أنه من أجل كل $x > -1$ يكون $\ln(1+x) \leq x$ ثم استنتج وضعية (γ) بالنسبة إلى المماس عند النقطة O ثم ارسم (γ)

$$(III) \quad F \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالعلاقة } F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(1) عدد حقيقي موجب تماما وثابت، تحقق أن $F(r)$ و $F(-r)$ هما مساحتين لحيزين متقايسين ثم استنتج شفعية الدالة F . و حدد اتجاه تغير F على $[0, +\infty[$

(2) استعمل وضعية (γ) بالنسبة إلى مماسه عند النقطة O للتحقق من أن $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$

$$(3) \quad \text{برهن أنه من أجل كل } t \geq 1 \text{ يكون } \frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$

$$(4) \quad \text{لما } x \geq 1 \text{ احسب } \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt \text{ ثم استنتج نهاية } F(x) \text{ و } \frac{F(x)}{x} \text{ عند } (+\infty)$$

(5) اعط تصور عن رسم المنحنى الممثل للدالة F (خذ بعين الاعتبار $F(1) \approx 0.4$)

تم هذا الكتاب بعون الله تعالى



كلمة الناشر

كنا طلبة ... و كانت الكتب العلمية تأتينا من الخارج
كنا نتسابق لشرائها من المكتبات بلهفة و شوق ... و أشد
لهفتنا كانت على الكتب الفيزياء و الرياضيات التي تحمل
أصعب التمارين والمسائل ... و كنا نبحث عن الجديد ...
فأحببنا الكتاب و أحببنا الجديد.

لهذا كانت سلسلة الجديد في " ... " هي الأولى في مجموعات
الكتب التي نأمل أن نصدرها للتعليم المتوسط و الثانوي
والجامعي و قد أصدرنا البعض منها في الفيزياء و الكيمياء
والعلوم و الرياضيات و الأدب ، و إنها ستكون " إنشاء الله " من
أبرز الكتب في الساحة العلمية حتى على مستوى الوطن
العربي .

ومع أن هذا الكلام حق ، فإنني أحمد الله سبحانه و تعالى أن
يصادف خروج هذه السلسلة انبثاق فجر الآمال في أن تسترد
الجزائر حياتها الغالية - حياة الشهداء - و أن تهتدي
بهدي نبيينا الأعظم صلى الله عليه و سلم و تستعيد سيرة أبي
بكر وعمر ... آمين .

كرطوس بوجمعة